edice aliter

Steven **Strogatz**

Radost z x

Průvodce matematikou od jedné do nekonečna

DOKOŘÁN ARGO

Steven Strogatz

RADOST Z *X*

Průvodce matematikou od jedné do nekonečna

Druhé vydání (první elektronické) v českém jazyce.
Z anglického originálu *The Joy of x. A Guided Tour of Math, from One to Infinity* přeložil Jan Klíma.
Odpovědný redaktor Zdeněk Kárník.
Redakce Marie Černá.
Obálka, sazba a konverze do elektronické verze Tomáš Schwarzbacher Zeman.
Vydalo v roce 2014 nakladatelství Dokořán, s. r. o., Holečkova 9, Praha 5, dokoran@dokoran.cz, www.dokoran.cz, jako svou 719. publikaci (162. elektronická).

ISBN: 978-80-7363-658-6

edice aliter

DOKOŘÁN

ARGO

edice aliter – svazek 57

Steven **Strogatz**

Radost z x

Průvodce matematikou od jedné do nekonečna

Přeložil Jan Klíma

Nakladatelství Dokořán a Argo
Praha 2014

Obsah

Předmluva

Mám přítele, kterého velmi baví přírodní vědy, i když je profesí výtvarník. Kdykoliv se vidíme, ze všeho nejvíc si chce popovídat o nejnovějších věcech v psychologii nebo kvantové mechanice. Ale když dojde na matematiku, připadá si ztracený a je mu to líto. Ty podivné symboly ho odrazují. Tvrdí, že ani neví, jak se čtou.

Ve skutečnosti je jeho odcizení ještě hlubší. Pořádně neví, co ti matematici mohou celý den dělat nebo co myslí tím, že nějaký důkaz je elegantní. Občas se z legrace domlouváme, že se jednou posadíme a já ho budu učit a že mám začít od začátku, od 1 + 1 = 2, a pokračovat dál, kam až to půjde.

Vypadá to jako šílený nápad, ale ve skutečnosti to je přesně to, o co se pokusíme v této knize. Představuje exkurzi do základů matematiky od předškolní až po matematiku vysokoškolskou. Je určena všem zájemcům, kteří chtějí dostat druhou šanci pochopit matematiku, tentokrát vykládanou z perspektivy dospělých. Nepůjde ale o doučování. Cílem knihy je, aby čtenář lépe pochopil, čím se matematika zabývá a proč tak okouzluje lidi, kteří jí rozumí.

Uvidíme, jak nám smečované koše Michaela Jordana pomohou vysvětlit základy infinitezimálního počtu. Ukážu vám jednoduchý a půvabný způsob, jak chápat jeden ze základních geometrických teorémů – Pythagorovu větu. Pokusíme se dostat na kloub některým záhadám života, malým i velkým: Byl O. J. Simpson vinen? Jak převracet matraci, abyste ji opotřebovávali co nejméně? Kolik známostí by člověk měl mít, než se usadí? A taky uvidíme, že některá nekonečna jsou větší než jiná.

Matematika je všude, když víte, kam se dívat. Rozpoznáme sinusoidy v pruzích zebry, v Deklaraci nezávislosti uslyšíme ozvěnu Eukleidových slov a v atmosféře před první světovou válkou rozpoznáme záporná čísla. A také si ukážeme, jak jsou dneska naše životy ovlivňovány novými matematickými obory, když si vybíráme na internetu restauraci nebo když se snažíme pochopit – a samozřejmě také přežít – děsivé zvraty na burze.

Zvláštní náhodou, která je obzvláště příhodná pro knihu o číslech, se *Radost z x* zrodila v den mých padesátin. David Shipley, který byl tou dobou redaktorem *New York Times*, mě ten slavný den pozval na oběd (aniž by o narozeninách věděl) a zeptal se mě, jestli bych nenapsal pro jejich čtenáře seriál článků o matematice. Představa, že bych se mohl o potěšení z matematiky podělit s větším publikem, než je můj zvídavý malířský přítel, se mi okamžitě zalíbila.

„Základy matematiky“ se objevily na internetu koncem ledna 2010 a pokračovaly patnáct týdnů. Přišla záplava dopisů a připomínek od čtenářů všeho věku. Mnozí z nich byli studenti a učitelé. Jiní byli prostě zvědaví lidé, kteří z nějakého důvodu zanedbali své matematické vzdělání, a teď začali mít dojem, že jim chybí cosi cenného pro život a chtějí to dohnat. Obzvláště mi dělaly radost dopisy rodičů, kteří mi děkovali, že jsem jim pomohl, aby mohli vysvětlit matematiku svým dětem a při té příležitosti i sobě. Dokonce se zdálo, že mé stránky čtou s potěšením i moji kolegové a příznivci matematiky, a mnozí dokonce navrhovali, jak je vylepšit.

Celkem vzato mě tyto zkušenosti přesvědčily, že mezi lidmi existuje značný – byť nepříliš pěstovaný – zájem o matematiku. Přes všechny ty řeči, jak mají lidé z matematiky strach, mnoho lidí *chce* tento obor lépe pochopit. A jakmile se jim to podaří, získá si je.

Radost z x je úvod do těch nejzákladnějších a nejvýznamnějších myšlenek. Kapitoly – některé převzaté ze seriálu v *New York Times* – jsou krátké a do značné míry nezávislé, takže je můžete číst na přeskáčku. Pokud se o probíraných věcech chcete dozvědět víc, poznámky na konci knihy obsahují další podrobnosti a literaturu k dalšímu studiu.

Pro čtenáře, kteří raději postupují popořadě, jsem materiál uspořádal do šesti základních celků, které sledují tradiční uspořádání výkladu matematiky.

Část 1 se nazývá „Čísla" a začíná naši pouť počty z mateřské školy a aritmetikou školy základní. Zdůrazňuje, jak užitečná čísla jsou a jak podivuhodně dokážou popisovat svět.

Část 2 jsem pojmenoval „Vztahy"; přechází od práce s čísly k výkladu *vztahů* mezi čísly. To jsou myšlenky, které tvoří základy algebry. Jejich důležitost spočívá v tom, že poskytují první nástroje, jak popsat, že jedna věc ovlivňuje druhou, jako kupříkladu příčina a následek, nabídka a poptávka, dávka léku a reakce těla a podobně – vztahy, které způsobují, že svět je složitý a množství jevů tak bohaté.

Část 3 se jmenuje „Tvary" a přechází od čísel a symbolů k tvarům a prostoru – království geometrie a trigonometrie. Tyto pojmy charakterizují věci kolem nás a zároveň pozdvihují matematiku na novou úroveň exaktnosti metodou logických důkazů.

Část 4 nese název „Změna". Dostáváme se v ní k infinitezimálnímu počtu (pro který budeme většinou používat již i u nás stále více užívaný název „kalkulus"), nejhlubší a nejplodnější části matematiky. Diferenciální a integrální počet umožňují předpovídat pohyb planet, rytmus přílivu a odlivu – a prakticky všechny spojitě probíhající procesy ve vesmíru i v nás. Ruku v ruce s tímto tématem jde role nekonečna. Ochočení nekonečna bylo tím zlomovým okamžikem, který umožnil, aby infinitezimální počet fungoval. Jakmile kalkul zvládl děsivou moc nekonečna, dokázal konečně vyřešit mnoho do té doby neřešitelných úloh, které vzdorovaly našim předkům a jejichž vyřešení nakonec vedlo k vědecké revoluci moderní doby.

Část 5, „Data“, pojednává o pravděpodobnosti, statistice, sítích a vytěžování dat, což jsou všechno poměrně nové úlohy inspirované složitými aspekty života: štěstím, nejistotou, rizikem, nestabilitou, náhodností a konektivitou. Uvidíme, jak s tím správným typem matematiky a správnými daty dokážeme nalézt smysl i v dosud nezvladatelné záplavě dat.

Jak se v části 6, pojmenované „Hranice“, blížíme ke konci naší cesty, dostáváme se k nejpokročilejším partiím matematiky, na hraniční území mezi tím, co v matematice víme, a co stále ještě nedokážeme postihnout. Jednotlivé kapitoly této části sledují posloupnost, kterou jsme již jednou absolvovali – čísla, vztahy, tvary, změnu a data – ale každé z těchto témat je zde pojednáno hlouběji a v jeho moderní podobě.

Doufám, že všechna tato témata vám poskytnou zábavu a mnoho příležitostí překvapeně zvolat: Aha! Tak takhle to je! Ale každá cesta musí začít na začátku, takže začněme jednoduchým a magickým aktem počítání.

Část I

Čísla

1. Od ryb k nekonečnu

Nejlepší úvod – nejjasnější a nejžertovnější vysvětlení toho, co jsou čísla a proč je potřebujeme – lze nalézt na videu dětského televizního seriálu *Sesame Street*[1] s názvem *123, počítejte se mnou*. Humphrey, přátelská, ale natvrdlá postavička s růžovými chlupy a zeleným nosem, má službu v kuchyni v hotelu Furry Arms a obdrží objednávku z pokoje plného tučňáků. Humphrey pozorně poslouchá a pak tlumočí objednávky do kuchyně: „Ryba, ryba, ryba, ryba, ryba, ryba.“ To přiměje Ernieho, aby mu vysvětlil výhody čísla šest.

Děti z toho pochopí, že čísla jsou úžasné zkratky. Místo toho, aby Humphrey křičel „ryba“ tolikrát, kolik je tučňáků, mohl použít mocnějšího pojmu čísla šest.

Jako dospělí si však možná uvědomujeme i potenciální nevýhodu čísel – jsou to sice mocné zkratky, ale

platíme za to velkou cenu spočívající v jejich abstraktnosti. Šestka je mnohem abstraktnější pojem než „šest ryb“ právě proto, že je mnohem obecnější. Může se vztahovat k šesti kusům čehokoliv: šesti talířům, šesti tučňákům, šesti zvoláním slova „ryba“. Je to ta nepopsatelná věc, co mají všechny ty výroky společného.

Podíváme-li se na čísla takto, začnou se jevit trochu záhadně. Zjevně existují v nějakém druhu Platonova světa na vyšší úrovni, než je realita. V tomto smyslu se spíše podobají dalším vznešeným pojmům (jako je třeba pravda a spravedlnost) než objektům z běžné životní praxe. Dalším zkoumáním zjistíme, že jejich filozofický význam je ještě zamlženější. Kde se vlastně čísla vzala? Vymysleli si je lidé? Nebo je objevili?

Další okolností je, že čísla (a když na to přijde, tak všechny matematické pojmy) žijí vlastním životem.[2] Nemůžeme jim poručit. Přestože existují jen v našich myslích, jakmile se rozhodneme, co znamenají, nemůžeme už mluvit do toho, jak se chovají. Řídí se jistými zákony a mají jisté vlastnosti, své osobnosti, své názory na to, jak se spolu kombinují, a my s tím nemůžeme nic dělat, jen je pozorovat a snažit se je pochopit. V tomto smyslu jsou překvapivě podobná atomům a hvězdám, věcem z tohoto světa, které jsou podobně podřízeny zákonům, jež nemůžeme ovládat… až na to, že tyto věci existují i mimo naše mysli.

Tato duální povaha čísel – jejich pozemskost i nadpozemskost – je možná jejich nejparadoxnějším a zároveň nejužitečnějším rysem. To měl na mysli fyzik Eugene Wigner, když psal o „neuvěřitelné efektivitě matematiky v přírodních vědách“.[3]

Pokud vám není jasné, co mám na mysli, když říkám, že čísla žijí vlastními životy a že jejich chování nemůžeme ovládat, vraťme se ještě jednou k Furry Arms. Předpokládejme, že než Humphrey vyřídí objednávku tučňáků z jednoho pokoje, náhle dostane objednávku z dalšího pokoje, v němž je stejný počet tučňáků, kteří také chtějí rybu. Když obdržel obě objednávky, co má Humphrey do kuchyně zavolat? Pokud se nic nenaučil, musí zavolat „ryba“ za každého tučňáka nahoře. Anebo, pokud se poučil o číslech, zavolá, že chce šest ryb pro první pokoj a dalších šest pro druhý. Ale to, co vlastně skutečně potřebuje, je nový pojem: sčítání. Jakmile je zvládne, zavolá hrdě šest plus šest (anebo, když se chce vytáhnout, tak dvanáct) ryb.

Tvůrčí proces je tu stejný, jako když jsme předtím zavedli pojem čísel. Tak jako čísla jsou zkratky pro načítání po jedné, sčítání je zkratka pro načítání s libovolným krokem. Takhle matematika roste. Správná abstrakce vede k novému vhledu, novým schopnostem.

Nebude trvat dlouho a dokonce i Humphreymu dojde, že načítat by mohl věčně.

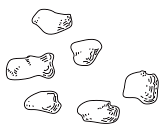
Nicméně i když se smíříme s nekonečnem, naše kreativita má vždycky své meze. Můžeme se rozhodnout, jaký význam mají pojmy jako 6 a „+“, ale jakmile to jednou uděláme, výrazům jako 6 + 6 už nemůžeme dál poroučet. Logika nám nedává žádnou volnost. V tomto smyslu v sobě matematika vždy zahrnuje jednak invenci, jednak objevování: vymyslíme pojmy, ale objevujeme jejich důsledky. Jak uvidíme v dalších kapitolách, svoboda v matematice znamená svobodu kladení otázek a volby přístupu, ale netýká se odpovědí, které na nás čekají.

Jako všechno, i aritmetika má jak svou hravou,[1] tak i svou vážnou tvář.

Tou vážnou tváří je to, co jsme se všichni naučili ve škole: jak pracovat se sloupci čísel, jak je sčítat a odčítat, jak je prohnat tabulkovým procesorem, když žádáme o vrácení přeplatku daní nebo děláme roční uzávěrku. Tato stránka aritmetiky je důležitá, praktická a – pro mnohé z nás – neradostná.

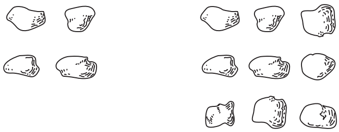
Hravá stránka aritmetiky je známá mnohem méně, pokud jste neabsolvovali kurzy vyšší matematiky. Přitom na ní není nic od přírody složitého. Je přirozená jako dětská zvídavost.[2]

Ve své knize *A Mathematician's Lament* (Matematikův nářek) propaguje Paul Lockhart metodiku výuky, v níž jsou čísla zaváděna konkrétněji, než je obvyklé: navrhuje představit si je jako skupiny kamenů. Pak třeba číslo 6 odpovídá hromádce kamení, jako je tato:

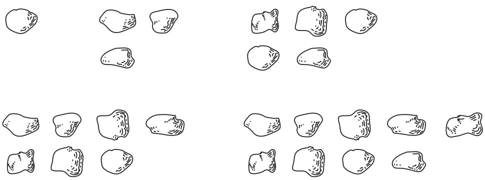


Na tom nejspíš nevidíte nic pozoruhodného, a taky máte pravdu – pokud na čísla neklademe další podmínky, vypadají všechna celkem stejně. Příležitost ke kreativitě nastane, když po číslech něco chceme.

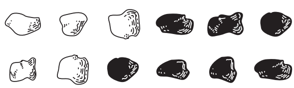
Tak třeba se soustřeďme na skupiny obsahující jeden až deset kamenů a položme si otázku, které z těchto skupin mohou kameny uspořádat do tvaru čtverce. Jsou to jen dvě skupiny: jedna se 4, druhá s 9 kameny. To proto, že 4 = 2 × 2 a 9 = 3 × 3. Jsou to čísla, která vzniknou jako druhá mocnina jiných čísel, a často se také – právě kvůli zmíněné vlastnosti – používá místo termínu „druhá mocnina čísla“ výraz „čtverec čísla“:



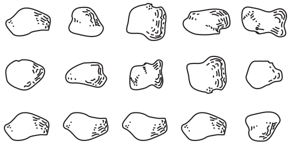
Méně svazující požadavek je nalézt skupiny kamenů, které můžeme přeskupit do tvaru obdélníka s právě dvěma řádky. To lze provést s množinami kamenů obsahujícími 2, 4, 6, 8 a 10 kamenů; počet kamenů musí být sudým číslem. Kdybychom se o totéž pokusili se zbývajícími čísly od 1 do 10 – s lichými čísly – vždycky nám jeden kámen zbude.



Nicméně všechno ztraceno není. Když takovéto dvě skupiny dáme dohromady, jejich výčnělky se spojí a součet vyjde sudý: liché + liché = sudé.



Když naše pravidla uvolníme ještě víc a připustíme čísla větší než 10 a také obdélníky s více než dvěma řádky kamenů, některá lichá čísla ukážou schopnost vytvořit takovéto větší obdélníky. Tak třeba číslo 15 tvoří obdélník tvaru 3 × 5.



Takže číslo 15, ačkoliv je nepochybně liché, se může aspoň utěšit zjištěním, že je číslem složeným – je složené ze tří řádek kamenů po pěti kusech. Podobně každé jiné číslo v tabulce násobků vytváří svůj vlastní kamenný obdélník.

Nicméně některá čísla, jako třeba 2, 3, 5 a 7, jsou skutečně beznadějná. Žádné z nich není schopno vytvořit jakýkoliv obdélník vyjma prosté řádky. Tato zvláštně nepoddajná čísla jsou ona slavná prvočísla.

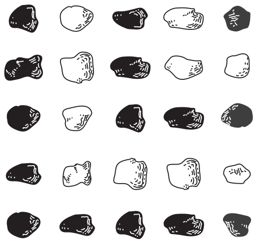
Vidíme tudíž, že čísla se chovají různě, což jim dodává cosi jako charakter. Ale abychom viděli jejich chování v plné šíři, musíme opustit jednotlivá čísla a podívat se, co se děje, když spolu navzájem reagují.

Tak třeba řekněme, že nebudeme sčítat dvě lichá čísla, ale že je posčítáme všechna počínaje 1:

$$1 + 3 = 4$$
$$1 + 3 + 5 = 9$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

Všechny výše uvedené součty tvoří kupodivu úplné čtverce. (Už jsme uvedli, že 4 a 9 tvoří čtverce, a podobně $16 = 4 \times 4$ a $25 = 5 \times 5$.) Můžeme se přesvědčit, že toto pravidlo zůstává v platnosti i pro lichá čísla větší a větší. Ale jaká může existovat spojitost mezi lichými čísly s jejich nemotornými výčnělky a klasicky symetrickými čísly tvořícími čtverce? Když správným způsobem uspořádáme příslušné kameny, tato překvapivá spojitost se rázem objeví – znak elegantního důkazu.[3]

Klíčové je uvědomit si, že liché číslo může mít podobu písmene „L“ o stejně dlouhých ramenech. Když pak všechna tato „L“ vložíme do sebe, dostaneme čtverec!



Tento typ uvažování se objevuje i v jiné nedávno vydané knize, i když literární kontext je zcela odlišný. V roztomilém románu *The Housekeeper and the Professor* (Hospodyně a profesor) od Yoko Ogawové pečuje bystrá, byť nevzdělaná mladá žena s desetiletým synem o postaršího matematika, který utrpěl těžké zranění mozku, po němž jeho krátkodobá paměť je schopna uchovat jen posledních osmdesát minut. Odtržený od života, v ošuntělé chalupě a osamělý se svými čísly, se profesor snaží navázat kontakt s hospodyní jediným způsobem, který mu je blízký: vyptává se na její číslo bot nebo datum narození a konverzuje o matematických vlastnostech zjištěných údajů. Profesor si rovněž oblíbí jejího syna, kterému dá přezdívku „Odmocnina“, protože znak pro odmocninu, √, mu připomíná vršek chlapcovy hlavy.

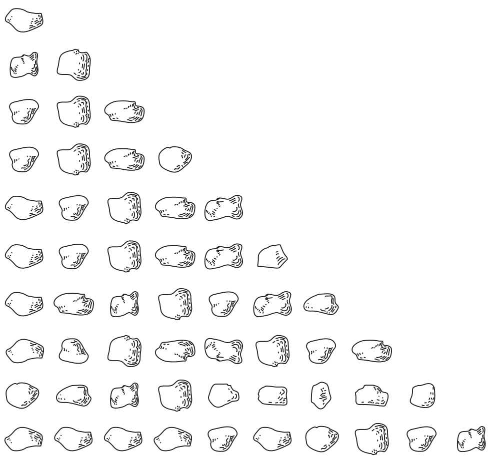
Jednoho dne dá profesor chlapci následující úkol: najít součet všech čísel od 1 do 10. Chlapec pečlivě sčítá a nakonec obdrží výsledek (55). Ale profesor chce, aby nalezl chytřejší způsob, jak výsledek dostat. Zeptá se, jestli by ho dokázal najít, *aniž* by jakákoliv čísla sečetl. Chlapec vyskočí a křičí: „To nejde!“

Hospodyně je pozvolna vtahována do světa čísel a snaží se tajně nalézt řešení sama. „Nechápu, proč jsem začala ztrácet čas řešením dětských matematických hádanek, které nemají žádný užitek," říká. „Nejdřív jsem chtěla udělat profesorovi radost, ale postupně se tenhle důvod začal vytrácet a uvědomovala jsem si, že už jde jenom o boj mezi mnou a tou úlohou. Když jsem se ráno probudila, hned se mi před očima vynořila rovnice

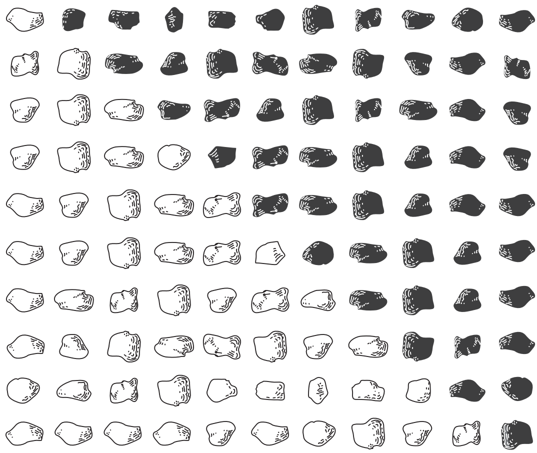
$$1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 10 = 55$$

a pronásledovala mě celý den, jako kdyby byla vypálena do oční sítnice, takže jsem ji nemohla ignorovat."

K řešení profesorovy úlohy lze dospět různými cestami (zkuste, kolik jich najdete). Profesor sám argumentoval podobně jako dosud my. Interpretuje součet od 1 do 10 jako trojúhelník z kamenů, 1 je v první řádce, 2 ve druhé, a tak dále, až v desáté řádce je kamenů 10.



Už na pohled dává obrázek pocit, že ho část chybí, vypadá, jako by ho byla jen polovička. A to umožňuje krok vpřed. Jestliže tento trojúhelník zkopírujeme, přetočíme ho kolem nejdelší hrany a přidáme k našemu obrázku jako onu chybějící polovinu, dostaneme něco mnohem jednoduššího: obdélník o deseti řádcích s 11 kameny v každé řádce, celkem tedy 110 kamenů.



Jelikož původní trojúhelník tvořil polovinu tohoto obdélníka, je hledaný součet polovička ze 110 čili 55.

Možná vypadá neobvykle uvažovat o číslech jako o skupinách kamenů, ale ve skutečnosti to je pohled starý jako matematika sama. Slova *kalkul* nebo *kalkulačka* odrážejí toto dědictví – pochází z latinského *calculus*, což byl oblázek používaný k počítání.