MATEMATIKA **PRO BYSTRÉ A NADANÉ ŽÁKY**

Úlohy pro žáky 2. stupně ZŠ a víceletých gymnázií, jejich rodiče a učitele

Irena Budínová
Růžena Blažková

edika.

ZKUŠENOSTI S NADANÝMI ŽÁKY • 225 ÚLOH S VÝSLEDKY

Matematika pro bystré a nadané žáky – 2. díl

Vyšlo také v tištěné verzi

Objednat můžete na
www.edika.cz
www.albatrosmedia.cz

Růžena Blažková, Irena Budínová
Matematika pro bystré a nadané žáky – 2. díl – e-kniha
Copyright © Albatros Media a. s., 2017

Všechna práva vyhrazena.
Žádná část této publikace nesmí být rozšiřována
bez písemného souhlasu majitelů práv.

ALBATROS MEDIA a.s.

Růžena Blažková, Irena Budínová

MATEMATIKA PRO BYSTRÉ A NADANÉ ŽÁKY, 2. DÍL

Edika
Brno
2017

OBSAH

1/ Úvod **5**

2/ Nadaný žák **6**

3/ Přístupy bystrých a nadaných žáků k řešení úloh **9**

4/ Úlohy **20**

4.1/ Počítáme s čísly 20

4.1.1/ Hříčky s čísly 20

4.1.2/ Algebrogramy 24

4.1.3/ Dělitelnost 27

4.1.4/ Poměr 29

4.1.5/ Magické čtverce 30

4.2/ Počítáme s neznámou 34

4.2.1/ Úlohy rovnicového charakteru 34

4.2.2/ Soustavy rovnic 37

4.2.3/ Neurčité rovnice 38

4.2.4/ Kvadratická rovnice 40

4.2.5/ Funkční myšlení 41

4.3/ Geometrie 48

4.3.1/ Geometrická představivost 48

4.3.2/ Početní geometrie 53

4.3.3/ Konstrukční geometrie 59

4.3.4/ Jednoduché důkazové úlohy 61

4.4/ Počítáme možnosti 63

4.4.1/ Kombinatorika 63

4.4.2/ Pravděpodobnost 67

4.4.3/ Statistika 69

5/ Výsledky úloh **77**

Literatura **95**

1/ ÚVOD

Držíte v ruce publikaci, která byla vytvořena s účelem obohatit zajímavými a netypickými úlohami žáky 2. stupně ZŠ a víceletého gymnázia, kteří mají zvýšený zájem o matematiku. Publikace může být využita jak v přímé výuce, kdy učitel zadává zajímavé úlohy žákům, kteří snadněji porozumí běžnému matematickému učivu, tak ve volném čase žáků, kdy rodiče spolu s žákem mají zájem o rozvoj žákova matematického myšlení.

Úlohy jsou voleny tak, aby využívaly možnosti řešit je různými způsoby podle toho, jakým matematickým aparátem je aktuálně žák vybaven – např. experimentem, úvahou, rovnicemi, soustavami rovnic apod. Úlohy jsou rozděleny do několika kapitol, avšak jednotlivá témata se často prolínají. Úlohy nejsou jednoznačně zařaditelné a je možno je řešit různými metodami.

Některé úlohy prohlubují učivo základní školy (jedná se o úlohy s vyšší náročností, než je běžné na ZŠ) a některé ho rozšiřují, jako kvadratické rovnice, kombinatorika, pravděpodobnost, Euklidovy věty. S těmito tématy se v matematice základní školy obvykle nesetkáme, ale matematicky nadaní žáci mohou být dostatečně mentálně zralí na to, aby problematiku pochopili a úlohy úspěšně řešili. Objevování nových souvislostí a zákonitostí rozvíjí jejich matematické myšlení. Žáky může problematika zaujmout a být podnětem k hlubšímu studiu.

Dosáhnout správného výsledku je jistě důležité, ale ještě důležitější je cesta, která k výsledku vedla. Žák by měl být schopen zaznamenat postup řešení, zapsat myšlenkové pochody, které vedly k řešení. U některých úloh je nezbytná trpělivost při hledání všech řešení. Neměli bychom také zapomínat na zkoušku správnosti, která umožní najít případnou chybu. Nadaní žáci nejsou neomylní, dělají také chyby, ale je důležité s chybou dále pracovat a poučit se z ní.

Publikace obsahuje ukázky žákovských řešení některých úloh, 37 řešených úloh a 225 neřešených úloh s výsledky.

Autorky děkují doc. PhDr. Šárce Portešové, Ph.D., RNDr. Mileně Vaňurové, CSc. a Mgr. Heleně Durnové, Ph.D. za cenné připomínky, které přispěly ke zkvalitnění textu.

2/ NADANÝ ŽÁK

Jakého žáka si představíme, když se řekne „nadaný žák“? Každý možná trochu jiného žáka. Někdo za nadaného považuje takového žáka, který plní úkoly rychleji než vrstevníci nebo který nikdy nechybuje. Někdo jiný vnímá nadaného žáka podle hloubky vhledu a pochopení problematiky, bez ohledu na rychlost plnění úkolů. Pro většinu z nás je však pojem nadání spojen s nadprůměrným výkonem v určité oblasti.

Ani oficiální definice nejsou zcela jednotné. Některé přístupy chápou nadání jako **projev** vynikajícího, nadprůměrného výkonu, jiné jako **potenciál** podávat nadprůměrný výkon v jakékoli hodnotné oblasti, případně jako potenciál rozvíjet svou **kreativitu** (Havigerová, 2011). Velmi častá je IQ definice, která jako nadaného označuje každého, kdo má **nadprůměrnou hodnotu inteligenčního kvocientu**, obvykle IQ≥130 (Havigerová, 2011). Tento přístup je výhodný z pohledu měřitelnosti a také srovnání výkonů nadaných jedinců. Portešová (2011) uvádí, že význam IQ se v 70. letech 20. století začal přehodnocovat. Začalo se projevovat, že IQ není jedinou stránkou, která ovlivňuje úspěch dítěte v pozdějším životě. Z tohoto důvodu je vhodnější Renzulliho model (1978), který uvažuje tři charakteristiky důležité pro nadání, které je využitelné v budoucím životě: **nadprůměrné schopnosti**, **tvořivost** a **angažovanost v úkolu** (Portešová, 2011).

IQ pohled nezohledňuje motivaci jedince a zájem o matematiku. Při vyhledávání nadaných dětí je proto důležité dlouhodobé pozorování žáka. Nadaný žák není neomylný. Důležité ale je, jak s chybou pracuje. Udělá-li nadaný žák chybu, často jej stačí jen zlehka nasměrovat a ihned se opraví.

Všeobecná inteligence, která je často identifikována IQ testem, nemusí zcela korespondovat s matematickými schopnostmi žáka. Gardner (1999) rozděluje inteligenci na sedm druhů. Matematické schopnosti mohou být ovlivňovány **verbální inteligencí** (řečové schopnosti, díky nimž žáci mohou dobře analyzovat slovní úlohy), **logicko-matematickou inteligencí** (schopnost rozpoznat, v čem spočívá problém, a vyřešit jej) a **prostorovou inteligencí** (uplatňující se nejvíce v geometrii).

Člověk se narodí s určitým potenciálem být úspěšný v dané oblasti. Pokud jeho potenciál není rozvíjen, výkony jedince mohou být nadprůměrné v prvních letech školního vzdělávání, pak však začnou klesat. My budeme proto nadání chápat jako *dispozici k projevení nadprůměrných výkonů v jakékoli hodnotné oblasti lidského snažení* (Havigerová, Křováčová a kol., 2011: s. 5). Cílem výuky matematiky přitom je tento potenciál objevit a rozvíjet jej tak, aby z něj dítě vytěžilo maximum.

Rozvoj vrozené mentální kapacity závisí na mnoha faktorech. Významným faktorem pro rozvoj osobnosti člověka je jeho pevné přesvědčení, že je schopen se učit a být výkonný v různých oblastech (Campbell, 2001: s. 25). Z hlediska získávání míry sebedůvěry dítěte v různých oblastech učení připadá dle Campbella hlavní role rodičům. Kromě zvyšování sebedůvěry mohou rodiče ovlivňovat i postoje a způsoby chování dítěte, jež mu umožní dosahovat úspěchů (Campbell, 2001: s. 26):

- Rodiče pomáhají dítěti vypěstovat pracovní návyky, které jsou základem pro učení.
- Pomáhají dítěti stanovovat si **rozumné** cíle, o jejichž splnění bude usilovat.
- Pěstují v dítěti jeho **přirozené** zájmy a jeho vůli učit se novým věcem.

- Rodiče pomáhají dětem rozvíjet jejich samostatné myšlení, takže jsou samy schopny řešit problémy související s učením.
- Rodiče vedou své děti k tomu, aby se nedávaly unášet úspěchy a nepropadaly depresi při neúspěších.

Campbell uvádí, že svým přístupem mohou rodiče zvýšit nebo snížit až o 20–30 % studijní výsledky svých dětí.

Dle našich zkušeností mají podobnou možnost působit na své žáky taky učitelé. Ve výuce matematiky mohou v žácích pěstovat správné pracovní návyky – např. přehledný zápis zadání, zápis postupu řešení, provádění zkoušky, uvádění odpovědi. Jestliže je nadaným žákům v matematice ponechána možnost řešit úlohy bez zapsání postupu, stávají se z nich tak říkajíc „jednoocí mezi slepými". Časem přijdou úlohy, které budou příliš obtížné, aby je žáci řešili pamětně. To už ale může být pozdě na to učit se matematickému zápisu.

Dále mají učitelé možnost rozvíjet a kultivovat u žáků metody řešení úloh. Většina žáků preferuje během prvních ročníků ZŠ různé experimentální metody. Ty mohou být zcela nahodilé, nebo systematické (tzv. řízený experiment). Prvním krokem je tedy přesun od nahodilé k systematické experimentální metodě. V dalším kroku je potřebné povýšit experimentální metodu na některou ze sofistikovanějších aritmetických metod – různé metody se odvíjí od různých typů úloh. Ve vyšších ročnících ZŠ je potřeba přecházet k algebraickým metodám, které jsou univerzálnější než aritmetické, ale často jsou náročnější. Aby učitel věděl, ve které fázi vývoje se žák nachází a které metody u něj převládají, je nutné, aby byla žákům ponechána svoboda řešit úlohy svým způsobem a také možnost udělat chybu (chyba není hodnocena jako nedostatek, ale jako ukazatel pro změnu).

O nadaných dětech přetrvává mnoho mýtů. Jedním z nejčastějších mýtů o nadaných žácích je tento: *Chytré děti nemají mnoho pracovat*. Neboli: *Jestliže mnoho pracujete, nejste patrně dost chytří* (Campbell, 2001: s. 34). Některé nadané děti dokonce úmyslně maskují to, že k dosažení úspěchu potřebovaly těžkou práci. Pravda je ale taková, že jestliže dítě chce dosáhnout dobrých výsledků v určité oblasti, musí tomu věnovat čas a úsilí.

Dospělí mohou nadané děti podpořit tak, aby efektivně využívaly svůj potenciál. Důležitá je ale míra tlaku. Používají-li rodiče nebo učitelé tlaku velmi často, mohou v dítěti vyvolat strach. Dítě se začne bát, aby neudělalo nějakou chybu, aby nenosilo špatné známky. Jestliže na dítě není naopak vyvíjen téměř žádný tlak, může se jednat až o mírné zanedbávání výchovy[1] (Campbell, 2001: s. 54). Mnohdy rodiče a učitelé věří tomu, že dítě si vypěstuje potřebné schopnosti a dovednosti samo, bez jakékoli pomoci či tlaku.

Střední míru tlaku rodiče a učitelé vyvíjejí, když chtějí, aby dítě ze sebe vydalo co nejvíce. Požadavky, jež na dítě kladou, jsou rozumné a dítě je chápe jako realizovatelné.

Ve výuce matematiky mohou učitelé vyvíjet na nadané žáky optimální tlak tím, že jim budou zadávat úlohy, které odpovídají jejich mentálním možnostem. Rodiče mohou přispět tím, že dítě vedou ke každodenní přípravě do hodin matematiky a k zájmu o matematiku. Je třeba dávat pozor, aby se domácí

1 To je myšleno v obecné rovině, ale lze zanedbávat také rozvoj matematických schopností dítěte, kdy dítě nedostává v matematice podněty podle svého potenciálu.

příprava nepřehnala a nejednalo se o nepřiměřený tlak. K tomu může dojít třeba v případě, že dítě musí dennodenně sedět nad matematikou hodinu i více. Tím lze dítě až demotivovat.

Nadaní žáci mají rozmanité projevy chování. U některých nadaných žáků nemusí být nadání vůbec patrné. Někteří nadaní žáci se ve výuce projevují takovým způsobem, že učitelé o nich naopak soudí, že nemají pro matematiku dostatek schopností. Takový rozpor mezi skutečným a očekávaným výkonem může mít řadu příčin. Ve výuce také nesmíme zapomínat na **nadané žáky podvýkonné** a na žáky s **dvojí výjimečností**.

Podvýkonnými dětmi rozumíme děti, které dlouhodobě školsky neprospívají a potřebují speciální péči, nebo prospívají (mohou mít dokonce samé jedničky), ale nenaplňují svůj potenciál. Podvýkonnost může mít různé příčiny: nepřiměřený tlak okolí na dítě (ať už malý, nebo naopak velký), touha zařadit se mezi vrstevníky, nízké sebevědomí aj. Podvýkonné děti mají společné znaky, které se projevují v oblasti učení i chování. V oblasti učení se jedná zejména o tyto znaky: žák z nějakého důvodu zatajuje své vysoké schopnosti (např. se snaží o přízeň vrstevníků); má chabé pracovní návyky, malou výdrž, nedokončuje práci; obecně má malou schopnost koncentrace, ale dokáže se koncentrovat u činností, které jej baví; je frustrován nečinností a nedostatkem podnětů; často o všem diskutuje, ale má malou schopnost naslouchat; atd. (Thomson, 2006). V oblasti chování se jedná nejčastěji o tyto znaky: nedodržuje pravidla třídy, je konfrontační; neudrží pozornost; ignoruje potřeby druhých; vyrušuje spolužáky; může se jevit znuděný, frustrovaný, tvrdohlavý a nespolupracující; může se zdát, že zabíjí čas a je duchem nepřítomný; nemá trpělivost se spolužáky, kteří přemýšlí pomaleji; nekomunikuje dostatečně se spolužáky či učitelem; preferuje samostatnou práci a věnuje se vlastním zájmům; cítí se omezený restrikcemi, pracuje vlastním způsobem a tempem; atd. (Thomson, 2006). Snad každý učitel se setkal se žákem, který se projevoval právě takto. Je-li nekonformní chování žáka způsobeno podvýkonností, potřebuje žák pomoc ze strany učitele a trpělivé vedení, aby se postupně začal uplatňovat a rozvíjet jeho talent.

Dvojí výjimečnost je kombinace intelektového nadání a určitého postižení či specifických potíží, které mohou ovlivnit učení. Sociální a behaviorální obtíže do této kategorie spadají pouze jako část jiných podmínek ovlivňujících učení (Thomson, 2006: s. 26). Jedná se o nadané děti s vývojovými poruchami – např. dyslexií, dyspraxií, autismem (Aspergerův syndrom), ADHD, poruchami řeči. Tyto děti vyžadují velmi individuální přístup a velkou trpělivost od učitele.

Největší část skupiny nadaných s handicapem tvoří nadané děti s dyslexií. Zároveň jde o jedinou skupinu nadaných s postižením, u níž nemusí být jejich handicap tak zjevný a nápadný (Portešová, 2011). Tyto děti mívají neúhledný zápis, který způsobuje vznik mnoha chyb. Nejsou např. schopny správně pod sebe zapsat písemné sčítání či násobení, vynechávají číslice nebo zaměňují jejich pořadí, nejsou schopny zapsat číslo podle diktátu nebo správně přečíst zapsané číslo. Nadané děti s dyslexií potřebují od učitele podporu a pomoc v oblasti čtení a psaní matematických zápisů, aby se eliminovaly numerické chyby.

Velmi náročná je pro učitele práce s nadanými dětmi s Aspergerovým syndromem nebo ADHD. Tyto děti mají specifické projevy chování a vyžadují od učitele velkou dávku trpělivosti.

3/ PŘÍSTUPY BYSTRÝCH A NADANÝCH ŽÁKŮ K ŘEŠENÍ ÚLOH

V následující kapitole bychom chtěly upozornit na to, že výkony žáků, kteří jsou nadaní (všeobecně či matematicky) nebo se v matematice projevují nějakým způsobem nadprůměrně, nemusí být na první pohled excelentní. Nadaní a bystří žáci se vyznačují tím, že rádi promýšlí problémy – to ale nemusí korespondovat s rychlým, elegantním a přímočarým řešením matematických problémů. Někdy právě naopak, řešení mohou být krkolomná, obsahující nejrůznější chyby. Cílem potom není ohodnotit žákovo řešení jako nesprávné, ale podiskutovat s ním o jeho způsobu uvažování a navést ho na správnou cestu.

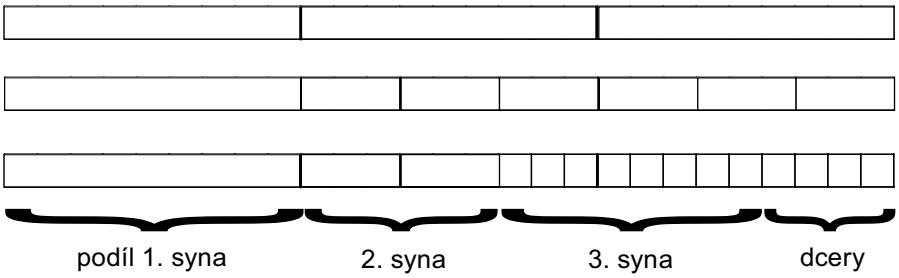
Velmi často se také u nadaných a bystrých žáků setkáváme s rozšířenými nešvary, jako je např. absence zkoušky úlohy a zapsání odpovědi. Právě neprovádění zkoušky mnoha žákům znemožní nalezení chyby ve výpočtu nebo v úvaze.

V textu se nebudeme zabývat pouze žáky, kteří byli Pedagogicko-psychologickou poradnou identifikováni jako nadaní. Nechaly jsme si od učitelů vytipovat žáky různého spektra – šikovné, jedničkáře, přemýšlivé aj. Učitel má totiž možnost žáka pozorovat v dlouhodobém horizontu a řekne nám o něm více než výsledek jednoho testu na identifikaci nadání. Navíc mnoho učitelů podotýká, že většina šikovných žáků odchází ze základních škol na víceletá gymnázia.

Příklad 1. *Z dědictví dostal první syn třetinu, druhý syn třetinu zbytku, třetí syn dvě třetiny zbytku po druhém a dcera to, co zbylo. Zapiš zlomkem, jakou část dědictví každý z nich dostal.*

To, že pro žáky jsou zlomky velký problém, je známý fakt. I přesto pro nás bylo velkým překvapením, že asi tři čtvrtiny žáků (od 7. ročníku výše) vytipovaných učiteli jako v určitém ohledu nadprůměrní v matematice si s uvedenou úlohou vůbec neporadily.

Úlohu mohli žáci řešit dvojím způsobem – graficky nebo početně. Graficky lze postupovat např. tak, že celé dědictví znázorníme podlouhlým obdélníkem (viz obr. 1). Rozdělíme jej na třetiny, jedna třetina je podíl dědictví prvního syna. Abychom mohli vyznačit část druhého syna, je třeba zbytek úsečky rozdělit tak, abychom mohli znázornit třetinu zbytku. Rozdělíme každou část zbývající úsečky na třetiny. Zbytek úsečky je nyní rozdělen na šest devítin, druhému synovi přísluší $\frac{2}{3}$ z toho, tedy $\frac{8}{27}$. Pro třetího syna nyní zjistíme dvě třetiny zbývající části, tedy $\frac{8}{27}$ celé úsečky. Zbývající $\frac{4}{27}$ přísluší dceři. Postup v jednotlivých krocích je znázorněn na obr. 1. Odpověď tedy zní, že 1. syn dostal $\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$ dědictví, 2. syn $\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$ dědictví, 3. syn $\frac{8}{27}$ a dcera $\frac{4}{27}$ dědictví. Provedeme zkoušku správnosti: $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{8}{27}+\frac{4}{27}=\frac{27}{27}=1$.

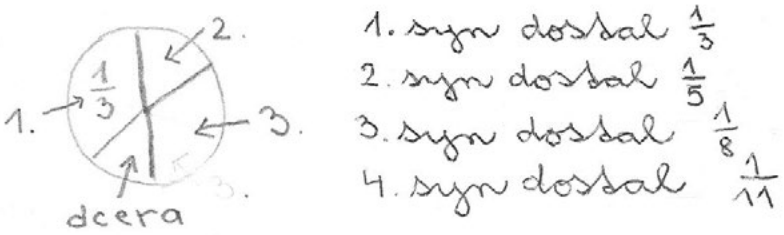


Obr. 1: Grafické znázornění zlomků – postup rozdělený do kroků

Řešit úlohu početně vyžaduje schopnost analýzy – žák musí neustále zvažovat, jaká část celku zbývá. Dále musí vědět, jak počítat zlomek ze základu. Potom: 1. syn dostal $\frac{1}{3}$ dědictví, zbyly $\frac{2}{3}$ dědictví, 2. syn dostal $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$ dědictví, zbylo $\frac{2}{3}-\frac{2}{9}=\frac{6}{9}-\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$ dědictví, 3. syn dostal $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}=\frac{8}{27}$ dědictví, dcera dostala $1-\frac{1}{3}-\frac{2}{9}-\frac{8}{27}=\frac{27}{27}-\frac{9}{27}-\frac{6}{27}-\frac{8}{27}=\frac{4}{27}$ dědictví.

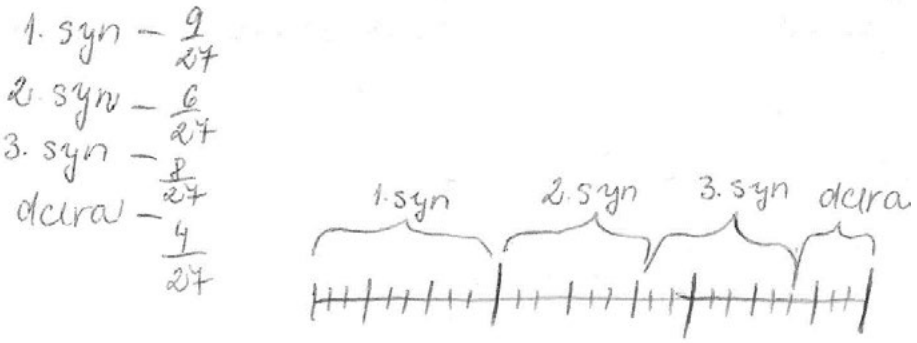
Žáci se s řešením velmi trápili. Projevilo se, že nemají mnohdy vytvořenou představu zlomku jako části celku, že neumí provádět operace se zlomky (mnohde se objevil zápis např. $\frac{1}{3}$ ze $\frac{2}{3}$, ale už nikoli odpovídající výpočet $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$), že nejsou schopni úlohu správně analyzovat. Když použili grafické znázornění, jednalo se více o hádání než o smysluplné řešení.

Žákyně 8. ročníku se pokusila o grafické znázornění. Rozhodla se pro nevhodné znázornění zlomků do kruhu. Odhadovala z obrázku části celku (viz obr. 2). Část 3 je podle obrázku větší než část 2, přesto jí přisoudila menší zlomek. Nakonec se ani nepokusila zkontrolovat, zda součtem zlomků dostane číslo 1.



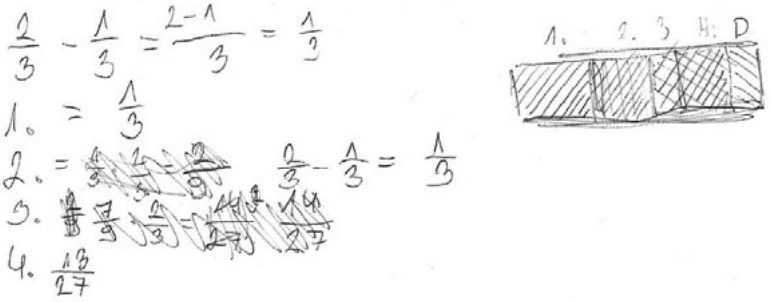
Obr. 2: Pokus o grafické řešení žákyní 8. ročníku

Bystrá žákyně 8. ročníku nejdříve také chtěla situaci znázornit pomocí kruhu. Po chvíli ale obrázek zabělila a rozhodla se pro znázornění pomocí úsečky. Úlohu díky tomu zvládla správně vyřešit (obr. 3).



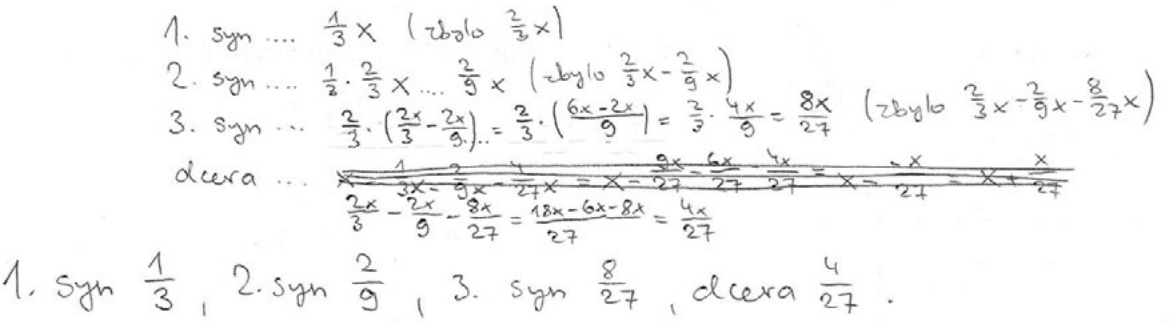
Obr. 3: Správně vyřešená úloha pomocí vhodného grafického znázornění

Žák 9. ročníku (učitelkou popsaný jako studijní typ s rozvinutým logickým uvažováním) začal správně výpočet podílu druhého syna, ale pak výsledek z nějakého důvodu přeškrtal (obr. 4). Další postup byl zmatečný.



Obr. 4: Pokus o řešení žákem 9. ročníku

Žákyně navštěvující 4. ročník víceletého gymnázia (tj. 9. ročník) se zaměřením na matematiku správně úlohu vyřešila početně (viz obr. 5). Vypověděla, že výpočet byl pro ni pracný a nejnáročnější pro ni bylo si uvědomovat, jaká část dědictví zbyla.



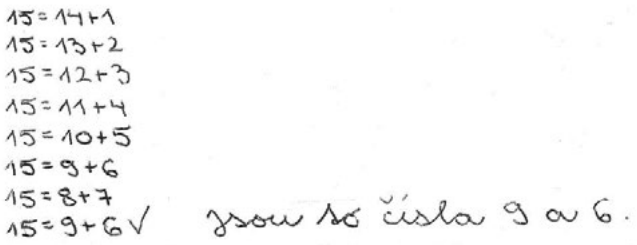
Obr. 5: Správně vyřešená úloha

Příklad 2. *Žáci dostali dvě analogické úlohy, které se od sebe lišily pouze velikostí čísel:*

a) Když dvě různá čísla sečteš, dostaneš 15. Když od většího odečteš menší, dostaneš 9. Která jsou to čísla?

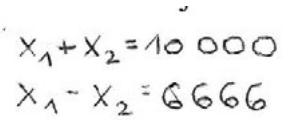
b) Když dvě různá čísla sečteš, dostaneš 10 000. Když od většího odečteš menší, dostaneš 6 666. Která jsou to čísla?

První variantu většina žáků byla schopna vyřešit pamětně. Pamětné řešení v tomto případě obvykle probíhá metodou pokusu a omylu, kdy žák dosazuje za neznámé různé hodnoty, ale postup nemusí zapisovat. Druhou variantu vyřešilo správně mnohem méně žáků (zhruba polovina oproti první variantě). Velká čísla jim znemožnila vytvořit představu, kterou jednoduše použili v první variantě. Ani žáci 9. ročníku, kteří měli k dispozici aparát soustavy rovnic, nebyli mnohdy v řešení úspěšnější. Buď nedokázali vytvořit správně soustavu rovnic, nebo ji vytvořili, ale nedokázali ji řešit. Na obr. 6 vidíme, že žákyně 9. ročníku (učitelkou popsaná jako šikovná, přemýšlivá, jedničkářka v matematice) použila k řešení první varianty metodu pokusu a omylu – zapisovala všechny celočíselné rozklady čísla 15 a vybrala ten, který splňoval i druhou podmínku, tj. 9 – 6 = 3. Jedná se o ne příliš sofistikovanou (tj. promyšlenou, formálně propracovanou) aritmetickou metodu.



Obr. 6: Žákyně 9. ročníku postupuje metodou pokusu a omylu

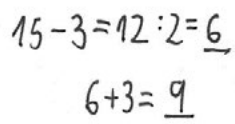
Pro druhou variantu stejná žákyně sestavila soustavu rovnic. Nebyla ji ale schopna řešit (viz obr. 7).



Obr. 7: Stejná žákyně není schopna vyřešit sestavenou soustavu rovnic

Na uvedeném příkladě je patrné, že zřejmě neexistuje jednoduchý transfer mezi analogickými úlohami s malými a velkými čísly. U úloh s malými čísly jsou žáci schopni využít představu. Úlohu pak mohou řešit i pamětně, a to s využitím experimentálních metod. Na základě toho nelze předpokládat, že žák bude schopen stejnou strategii využít i u úlohy s velkými čísly. Tyto úlohy se obvykle řeší snadněji sestavením rovnice či soustavy rovnic, což vyžaduje algebraický způsob uvažování, který žák nemusí mít vůbec vytvořený.

Žák 9. ročníku (učitelkou popsaný jako velmi rychlý v početních operacích s laxním přístupem ke škole, jedničkář v matematice) objevil chytrý způsob řešení první varianty: uvědomil si, že když od součtu dvou čísel odečteme jejich rozdíl, dostaneme dvojnásobek menšího čísla. Postup vidíme na obr. 8.

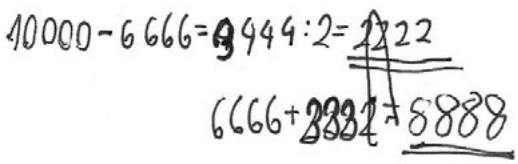


Obr. 8: Žák 9. ročníku řeší úlohu úvahou

Všimněme si, že žák uvažoval správně, ale jeho zápis v prvním řádku není v pořádku. Podle tohoto zápisu totiž platí 15 – 3 = 6, což není pravda. Těmto zápisům říkáme **implikační zápisy** (vedou v jednom směru) a žáci je používají ke zkrácení výpočtu. Správně by měl být zápis rozdělen do dvou kroků: 15 – 3 = 12, 12 : 2 = 6.

Je třeba upozornit, že „zkracování" zápisu zabraňuje žákům v přechodu k algebraickému ekvivalenčnímu uvažování, které je zapotřebí k řešení rovnic. Zejména u rovnic, kde se neznámá vyskytuje na obou stranách rovnice, např. $7x + 6 = \frac{x-2}{2}$, nelze postupovat v jednom směru.

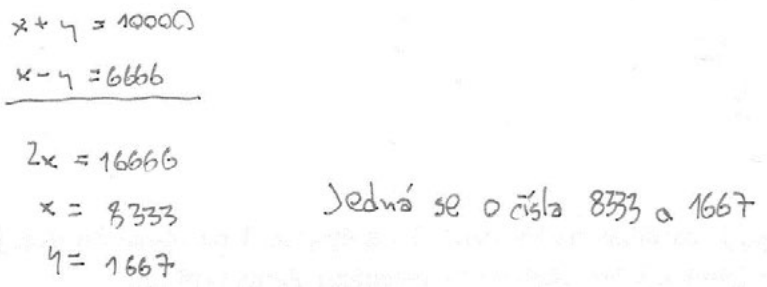
Protože žákovo řešení je založeno na úvaze, a nikoli na dosazování čísel, mohl stejnou strategii použít i na druhou variantu. To také udělal, ale v úspěšném řešení mu zabránila neschopnost efektivně počítat s velkými čísly (obr. 9). Žáci mají bohužel často malou počtářskou zkušenost a velké problémy jim činí např. sčítání a odčítání s několika přechody přes základ. Nejdříve špatně odečetl 10 000 – 6 666 a pak ještě nesprávný rozdíl 3 444 špatně vydělil dvěma. Nemohl se tedy dopočítat výsledku.



Obr. 9: Stejný žák používá tutéž úvahu, ale dělá numerické chyby

Existují tedy žáci s vysokým intelektem a rozvinutým logickým myšlením, kterým chybí počtářská zkušenost a její absence jim brání řešit náročnější úlohy. Nesmíme však zapomínat na žáky, kterým nechybí snaha a píle, ale základní výpočty jim přesto činí velké problémy. Často se jedná o **nadané děti s dyslexií**, které zvládnou náročnější logické úlohy velmi snadno, zatímco jednoduché vyřeší jen s velkými obtížemi. Portešová (2011: s. 73) uvádí, že *„nadané děti s dyslexií mají obvykle vynikající schopnost vysoce abstraktního a logického myšlení, dovedou vytvářet abstraktní koncepty neslovní povahy, rychle porozumí vzájemným vztahům mezi nimi, umí porovnávat nejrůznější alternativy a klást otázky, které jejich myšlení dále vedou. Mnohým z nich činí problémy používat jednoduché způsoby myšlení, založené na naučené, zapamatované a zautomatizované reakci či odpovědi."* U těchto dětí někdy bývá selhávání v jednoduchých úkolech hodnoceno jako jednoznačný důkaz absence nadání a nedostatek píle či zájmu.

Matematicky nadaní žáci 9. ročníku druhou variantu úlohy řešili téměř výlučně algebraicky, pomocí soustavy rovnic (obr. 10). Úloha pro ně byla jednoduchá na úvahu i na početní úkony.



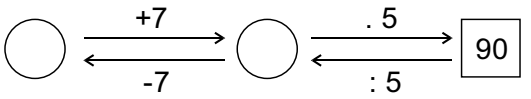
Obr. 10: Algebraické řešení matematicky nadaným žákem 9. ročníku

Příklad 3. *Když Aleš za 7 let vynásobí svůj věk pěti, vyjde mu 90. Kolik je mu let?*

Úlohu mohli žáci řešit algebraicky sestavením rovnice, nebo aritmeticky metodou od konce. Většina žáků volila aritmetické řešení. Občas se dopouštěli různých logických či numerických chyb. Žákyně 6. ročníku (učitelkou popsaná jako dobrá na početní operace, jedničkářka z matematiky) si zřejmě neuvědomila, že vypočítala věk Aleše za 7 let (obr. 11). Neprovedla zkoušku správnosti a tím nezjistila, že je výsledek nesprávný.

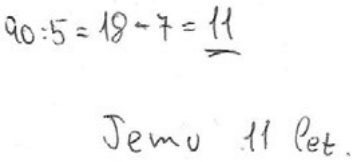
Obr. 11: Nedokončené řešení

Při řešení aritmetickou metodou od konce se využívá inverzních operací, tedy 90 : 5 = 18, 18 − 7 = 11. Tento postup je vhodné žákům 6. a 7. ročníku, kteří nemohou použít aparátu rovnic, znázornit pomocí **šipkového diagramu** (viz Vergnaud, 2009):



Obr. 12: Šipkový diagram

Žákyně 7. ročníku (učitelkou popsaná jako přemýšlivá se všeobecným rozhledem a dobrými nápady v matematice) použila aritmetický postup řešení od konce (obr. 13). Opět se setkáváme se zkráceným implikačním zápisem.



Obr. 13: Metoda řešení od konce. Zápis je implikační