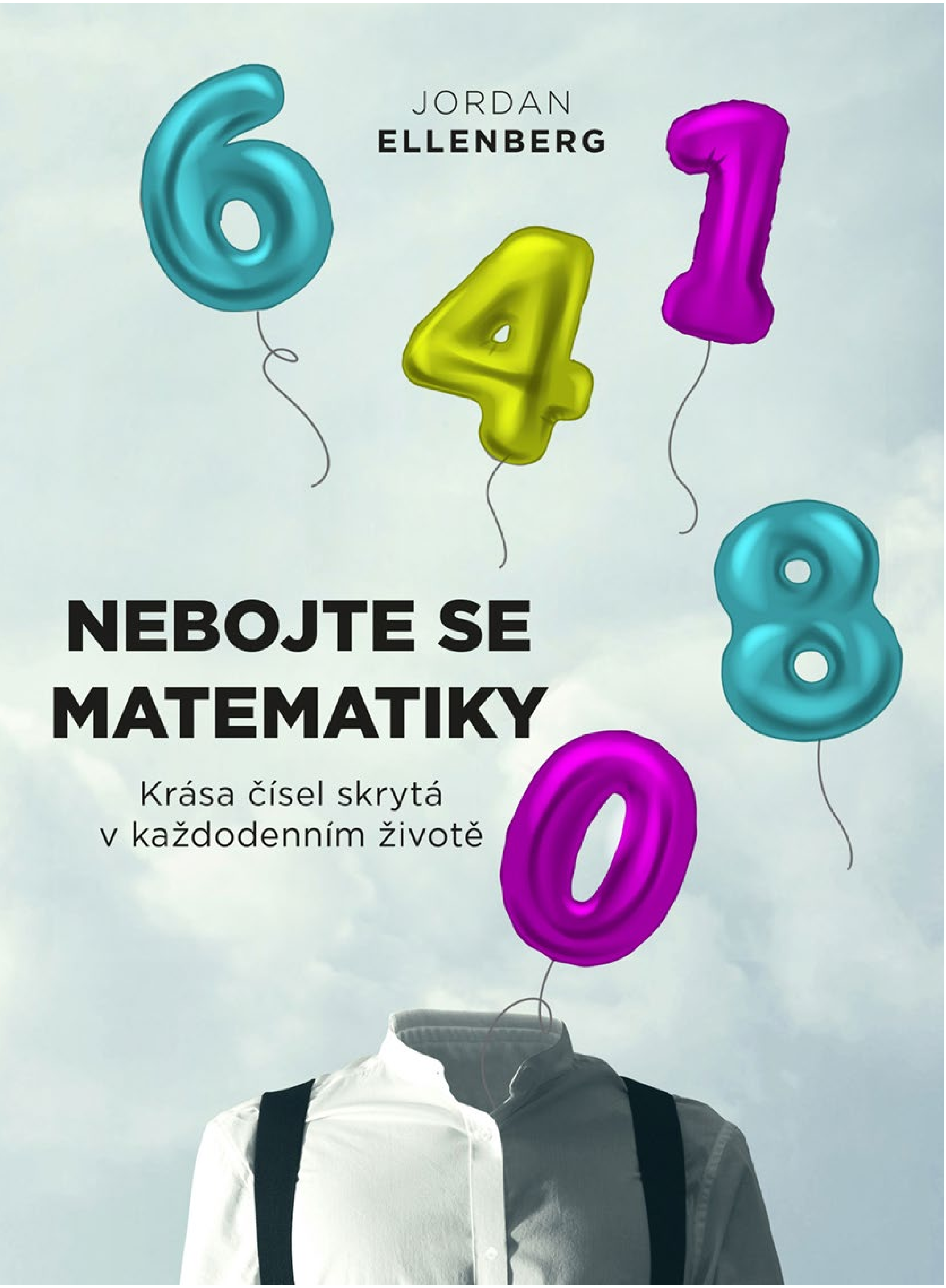

JORDAN
ELLENBERG
6
4
1
8
0
NEBOJTE SE
MATEMATIKY
Krása čísel skrytá
v každodenním životě

Nebojte se matematiky

Vyšlo také v tištěné verzi

Objednat můžete na
www.bizbooks.cz
www.albatrosmedia.cz

BIZ BOOKS

Jordan Ellenberg
Nebojte se matematiky – e-kniha

ALBATROS MEDIA

věnuji Tanyi

„To, co je v matematice nejlepší, bychom se neměli pouze učit jako nějaký úkol, ale osvojit si jako součást každodenního uvažování a opakovaně se k tomu v myšlenkách vracet s trvale živým nadšením.“

Bertrand Russell, „The Study of Mathematics“ (1902)

OBSAH

K čemu mi to bude dobré? 7

Část I
Linearita

Jedna Méně podobné Švédsku 27
Dvě Lokální přímka, globální křivka 36
Tři Všichni jsme obézní 54
Čtyři Kolik to je v mrtvých Američanech? 66
Pět Koláč větší než talíř 80

Část II
Usuzování

Šest Baltimorský makléř a biblická šifra 91
Sedm Mrtvé ryby neumí číst myšlenky 103
Osm Reductio ad nepravděpodobnost 130
Devět Mezinárodní haruspický časopis 143
Deset Jsi tam, Bože? Tady bayesovské usuzování 160

Část III
Očekávání

Jedenáct	Co byste měli čekat, když předpokládáte, že vyhrajete v loterii	189
Dvanáct	Zmeškejte více letadel!	224
Třináct	Kde se setkávají vlakové koleje	244

Část IV
Regrese

Čtrnáct	Triumf průměrnosti	283
Patnáct	Galtonova elipsa	298
Šestnáct	Způsobuje rakovina plic, že kouříte cigarety?	332

Část V
Existence

Sedmnáct	Nic takového jako veřejné mínění neexistuje	351
Osmnáct	„Úplně z ničeho jsem vytvořil podivný nový vesmír“	377

Jak mít pravdu	403
Poděkování	419
Poznámky	422

K ČEMU MI TO BUDE DOBRÉ?

Právě teď se někde na světě odehrává tato scéna: studentka se zlobí na svého učitele matematiky. Učitel své žáky požádal, aby podstatnou část víkendu strávili počítáním třiceti určitých integrálů.

Studentka by přitom raději chtěla dělat něco jiného. Vlastně bychom sotva našli nějakou činnost, které by *nedala* přednost. V tom má celkem jasno, protože převážnou část minulého víkendu věnovala počítání třiceti určitých integrálů z jiného – ale ne až tak *zásadně* odlišného – seznamu. Nevidí v tom žádný smysl a také to učiteli dává najevo. Po několika replikách studentka učiteli položí otázku, ze které má učitel největší strach:

„K čemu mi to bude dobré?“

Učitel nyní pronese něco v tomto duchu:

„Vím, že vám to připadá jednotvárné. Uvědomte si však, že zatím nevíte, co budete v životě dělat. Nyní se vám možná zdá, že to nemá žádný význam, ale třeba budete pracovat v oboru, kde bude opravdu důležité, abyste dokázala počítat určité integrály rychle, správně a bez pomůcek.“

Tato odpověď studentku obvykle neuspokojí. Není divu: je to totiž lež. A ví to jak učitel, tak i jeho žáci. Lidí, kteří někdy v životě budou potřebovat integrál $(1 - 3x + 4x^2)^{-2}$ dx, hodnotu kosinu 3θ nebo syntetické dělení polynomů, najdeme sotva pár tisíc.

Taková argumentace příliš nevyhovuje ani učiteli. Vím to z vlastní praxe: za dlouhé roky, co učím na univerzitě matematiku, jsem počítání určitých integrálů zadával mnoha stovkám studentů.

Naštěstí existuje lepší odpověď. Zní asi takto:

„Matematika se neomezuje na řadu výpočtů, které můžete rutinně provádět, dokud vám nedojde trpělivost nebo vás neopustí síly – ačkoli z toho, co jste se v předmětu zvaném *matematika* dříve učili, byste si to mohli myslet. Tyto integrály mají v matematice stejný účel jako posilování a kalistenika ve fotbale. Chcete-li hrát fotbal – myslím tím *opravdu hrát* na profesionální úrovni –, musíte zvládnout hodně nudných, opakovaných a na první pohled zbytečných cvičení. Myslíte, že profesionální hráči takové drily někdy *používají*? Z tribuny fotbalového stadionu nezahlédnete žádného hráče, jak zvedá činku nebo kličkuje mezi dopravními kužely. Vidíte však, že hráči využívají sílu, rychlost, postřeh a pružnost, které získali pomocí těchto cvičení za dlouhé týdny únavného úsilí. Nácvik takových drilů patří k fotbalovému umění."

„Jestliže se chcete fotbalem živit, nebo se třeba jen dostat do univerzitního týmu, musíte na cvičišti strávit hodně nudných víkendů. Jiná cesta není. Ale neklesejte na duchu. Pokud je toho drilu na vás moc, můžete zůstat u hry pro zábavu s přáteli. Užijete si přitom stejné vzrušení z kličkování mezi obránci či ze vstřelené branky jako profesionální hráči. Budete navíc zdravější a šťastnější, než kdybyste jen seděli doma na kanapi a sledovali dobře placené hráče v televizi."

„S matematikou je to v zásadě stejné. Možná kariéru v tomto oboru neplánujete. To je v pořádku – matematikou se živí jen málokdo. Přesto ji však můžete používat. Pravděpodobně to již *děláte*, i když si to ani neuvědomujete. Matematika je nedílnou součástí lidského uvažování. A můžete se díky ní zlepšit v jiných oblastech. Znalost matematiky člověku poskytuje jakési rentgenové brýle, které pod nejasným a chaotickým povrchem věcí odhalují skryté struktury. Matematika se svými metodami a návyky, které se vyvinuly během stovek let tvrdé práce a diskuzí, pomáhá správně se rozhodovat. Díky matematickým nástrojům můžete světu porozumět na hlubší, zásadnější a smysluplnější úrovni. Stačí vám, když se od učitele nebo jen z knihy naučíte pravidla a několik základních postupů. Já vás při tom mohu vést a radit vám."

Z časových důvodů to ve třídě říkám jen málokdy. Kniha však umožňuje argumentaci poněkud rozšířit. Doufám, že se mi vás podaří přesvědčit, že jsem v předchozím projevu nelhal. Pokusím se ukázat, že k běžným každodenním problémům – z oblasti politiky, medicíny, obchodu či teologie – lze přistupovat matematicky. Když se to naučíte, dokážete dojít k závěrům, které byste jinými způsoby nezískali.

I kdybych před třídou pronesl celý inspirační proslov, svou skeptickou studentku – pokud je skutečně bystrá – bych možná nepřesvědčil.

„Zní to dobře, pane profesore," řekla by. „Ale je to dost abstraktní. Říkáte, že s matematickými nástroji můžeme najít správná řešení problémů, které bychom jinak nedokázali rozlousknout. Ale jakých problémů? Uveďte prosím nějaký *praktický příklad*."

A tehdy bych začal vyprávět historii o Abrahamu Waldovi a chybějících průstřelech.

Abraham Wald a chybějící průstřely

Tento příběh, podobně jako mnoho jiných historií z druhé světové války, začíná tím, že nacisté vyštvou z Evropy nějakého Žida, a končí tím, že toho litují. Abraham Wald se narodil roku 1902 ve městě, které se tehdy nazývalo Klausenburg a leželo v Rakousko-Uhersku. Zatímco Wald vyrůstal, skončila první světová válka a z jeho rodného města se stal rumunský Kluž. Wald byl vnukem rabína a synem košer pekaře, ale záhy se projevil jeho matematický talent. Rychle si jej všimli i jeho učitelé a Wald byl přijat ke studiu matematiky na vídeňské univerzitě, kde jej přitahovala témata, která byla abstraktní a esoterická i podle měřítek čisté matematiky: teorie množin a metrické prostory.

Studia dokončil v polovině 30. let, kdy Rakousko procházelo hlubokou ekonomickou krizí. Nepřicházelo proto v úvahu, že by místo profesora ve Vídni mohl získat nějaký cizinec. Zachránila jej pracovní nabídka od Oskara Morgensterna. Ten později emigroval do USA a pomohl vyvinout teorii her, ale roku 1933 zastával místo ředitele Rakouského ústavu pro ekonomický výzkum. Wald u něj za nevelký plat pracoval na nejrůznějších matematických úkolech. Ukázalo se, že Wald udělal dobrý tah: díky tomu, že získal praxi v ekonomii, dostal nabídku stipendia v ekonomickém institutu Cowles Commission se sídlem v Colorado Springs. Navzdory stále horší politické situaci Wald váhal, zda udělat krok, který by jej nadobro odvedl od čisté matematiky. Potom však nacisté provedli anšlus Rakouska a tím Waldovi značně usnadnili rozhodování. Po pouhých několika měsících v Coloradu se mohl stát profesorem statistiky na Kolumbijské univerzitě. Znovu se sbalil a přestěhoval se do New Yorku.

A tam se zúčastnil druhé světové války.

Wald ji z převážné části strávil v utajovaném programu Statistical Research Group (SRG), který do válečného úsilí zapojil americké statistiky. Dalo by se to přirovnat k projektu Manhattan, až na to, že zde se místo bomb sestavovaly rovnice. A program SRG skutečně sídlil *na* Manhattanu, na adrese 401 West 118th Street ve čtvrti Morningside Heights, pouhý blok od Kolumbijské univerzity. V budově se nyní nacházejí byty zaměstnanců univerzity a lékařské ordinace, ale v roce 1943 se jednalo o rušné a aktivní nervové centrum válečné matematiky. Desítky mladých žen ve skupině aplikované matematiky se hrbily nad stolními kalkulátory Marchant a počítaly optimální letové křivky, díky nimž mohli piloti stíhaček udržet nepřátelská letadla ve svém zaměřovači. V jiném oddělení tým výzkumníku z Princetonské univerzity vyvíjel protokoly strategického bombardování. A hned vedle sídlila kolumbijská pobočka projektu atomové bomby.

Skupina SRG však byla ze všech těchto skupin nejdůležitější a nakonec také nejvlivnější. Panovala zde atmosféra intelektuální otevřenosti a akademické zvídavosti. Všichni si zároveň uvědomovali, že jejich práce má smysl, protože v sázce byly velké hodnoty. „Když jsme něco doporučili," napsal později ředitel W. Allen Wallis, „často se věci daly do pohybu. Kanony stíhacích letadel se nabíjely podle toho, jak Jack Wolfowitz* navrhl kombinovat různé typy munice, a piloti se pak možná vrátili na základnu – nebo také ne. Letadla startující z letadlových lodí odpalovala rakety, jejichž pohonné látky odpovídaly kontrolním plánům Abeho Girshicka. Mohlo se stát, že rakety explodovaly a zničily naše vlastní letadla, ale mohly také úspěšně zničit cíl."

Shromáždění matematických talentů odpovídalo závažnosti řešených úkolů. Podle Wallise představoval projekt SRG „z hlediska počtu i kvality nejvýjimečnější skupinu statistiků, jaká kdy byla sestavena". Do skupiny patřil Frederick Mosteller, který později založil katedru statistiky na Harvardu. Nechyběl ani Leonard Jimmie Savage, průkopník teorie rozhodování a velký propagátor oblasti, které se později začalo říkat bayesovská statistika.** Čas od času se zastavil Norbert Wiener, matematik z MIT a zakladatel kybernetiky. Milton Friedman, budoucí nositel Nobelovy ceny za ekonomii, byl v této skupině často teprve čtvrtým nejchytřejším člověkem v místnosti.

Tím úplně *nejchytřejším* byl zpravidla Abraham Wald. Wald na Kolumbijské univerzitě učil Allena Wallise (americký ekonom a statistik, prezident Rochesterské univerzity) a ve skupině působil jako matematická eminence. Stále patřil do kategorie „občanů znepřátelených zemí", takže technicky vzato vlastně nesměl vidět utajované zprávy, které sám tvořil. Ve skupině SRG se žertovalo, že sekretářky mají za úkol sebrat mu z rukou každý papír hned poté, co jej popíše. Jistým způsobem bylo zvláštní,

* Otec Paula Wolfowitze, amerického politologa a diplomata, bývalého předsedy Světové banky.

** Savage byl téměř úplně slepý a viděl pouze koutkem jednoho oka. Jednou se šest měsíců živil pouze sušeným masem, aby podpořil svůj argument ohledně zkoumání Arktidy. Podle mého názoru to stojí za zmínku.

že se Wald projektu vůbec účastnil. Odjakživa se přikláněl spíše k abstrakci a vyhýbal se přímým aplikacím. Na druhou stranu měl silnou motivaci, aby svůj talent uplatnil v boji proti mocnostem Osy. A když bylo potřeba převést nejasnou ideu na přesné matematické formulace, Wald byl člověkem na pravém místě.

Řešíme tedy následující problém. Chceme svá letadla chránit před sestřelením nepřátelskými stíhačkami, takže je pancéřujeme. Pancíř však zvyšuje hmotnost letadel, která pak hůře manévrují a spotřebují více paliva. Nevhodná je jak přílišná, tak i nedostatečná ochrana. Optimální hodnota leží někde mezi oběma krajnostmi. A skupina matematiků, která se shromáždila v New Yorku, má určit, kde se toto optimum nachází.

Armáda projektu SRG poskytla data, která by se k výpočtům mohla hodit. Když se americká letadla vracela z misí nad Evropou na své základny, byla plná děr po kulkách. Jednotlivé části strojů však nebyly poškozeny stejnoměrně. V trupech letadel bylo více průstřelů než v motorech.

Část letadla	**Počet průstřelů na čtvereční stopu**
Motor	1,11
Trup	1,73
Palivový systém	1,55
Zbytek letadla	1,8

Vojáci si uvědomili, že by letadla mohla být chráněna efektivněji. Stejné úrovně ochrany by se dalo dosáhnout tím, že se pancéřování umístí na ty části strojů, které to potřebují nejvíce – tam, kde letadla dostávají nejvíce zásahů. Nakolik je však potřeba pancéřování těchto částí letadel posílit? S touto otázkou se obrátili na Walda. Dostali však jinou odpověď.

Wald jim sdělil, že pancíř nepatří tam, kde je více průstřelů. Je potřeba jej přidat tam, kde díry po kulkách *nejsou*: na motory.

Waldův postřeh spočíval v tom, že se zamyslel nad tím, kde jsou chybějící průstřely? Ty, které by byly na krytech motorů, kdyby bylo poškození rozloženo rovnoměrně po celém letadle? Wald si byl celkem jistý, že to ví. Chybějící díry po kulkách byly na chybějících letadlech. Letadla se vracela zpět s menším počtem průstřelů motoru proto, že letadla, která dostala zásah do motoru, se vůbec nevrátila. Oproti tomu větší počet strojů, které se vrátily na základnu s trupem jako ementál, docela výmluvně svědčil o tom, že zásahy trupu lze (a proto by se měly) tolerovat. Když navštívíte dospávací pokoj v nemocnici, najdete tam mnohem více lidí se střelnými ranami na nohou než na hrudníku. To ale není způsobeno tím, že by kulky hrudník nezasahovaly, ale tím, že lidé s průstřelem hrudníku často nepřežijí.

Celou situaci lze dokonale objasnit pomocí starého matematického triku: *nastavíme některé proměnné na nulu*. V tomto případě manipulujeme s pravděpodobností, že se letadlo zasažené do motoru udrží ve vzduchu. Když tuto pravděpodobnost snížíme na nulu, znamená to, že jediný zásah motoru zaručuje sestřelení letadla. Jak by v takovém případě vypadala data? Na základny by se vracela letadla s průstřely na křídlech, v trupu a v přídi, ale ani jedno z nich by nemělo průstřel motoru. Vojenský analytik by takový stav mohl vysvětlit dvěma způsoby: buď by kanony německých stíhaček zasahovaly všechny části letadel s výjimkou motoru, nebo je motor místem naprosté zranitelnosti. Datům sice odpovídají obě vysvětlení, ale to druhé dává mnohem větší smysl. Pancíř patří tam, kde průstřely nejsou.

Waldova doporučení se rychle uplatnila v praxi a námořnictvo i letectvo je využívalo ještě při válkách v Koreji a ve Vietnamu. Nedá se přesně určit, kolik amerických letadel se takto podařilo zachránit, ačkoli následníci týmu SRG v moderní armádě nepochybně dospěli k docela přesnému odhadu. Americký vojenský establishment odedávna celkem dobře chápe, že země nevyhrávají války jen tím, že by měly odvážnější vojáky než jejich protivníci, byly svobodnější než oni, případně by se těšily Boží přízni. Vítězí obvykle ti, kteří ztratí o 5 % méně letadel, spotřebují o 5 % méně paliva, nebo svým pěšákům zajistí o 5 % lepší výživu při 95% nákladech. To sice zrovna nejsou faktory, o nichž by se točily válečné filmy, ale rozhodují o výsledku skutečných konfliktů. A na každém kroku se uplatňuje matematika.

Proč Wald viděl něco, co přehlédli důstojníci, kteří přitom měli mnohem větší zkušenosti a vědomosti o leteckých soubojích? Vysvětlení spočívá v tom, že Wald měl za sebou matematický myšlenkový trénink. Matematik se neustále ptá: „Z jakých předpokladů vycházíte? Jsou tyto předpoklady oprávněné?“ Někdy to může být na obtíž. Avšak zároveň může být takové uvažování velmi produktivní. V tomto případě vojáci své předpoklady přijali neuvědoměle: usoudili, že letadla, která se vracejí, představují náhodný vzorek všech letadel. Pokud by to platilo, mohli bychom na základě zkoumání distribuce průstřelů pouze těch zachovalých letadel dělat závěry ohledně distribuce průstřelů všech letadel. Jakmile si všimneme, že jsme přijali tuto hypotézu, můžeme si okamžitě uvědomit, že je naprosto chybná. Neexistuje žádný důvod se domnívat, že pravděpodobnost návratu letadla nijak nezávisí na místě, kam bylo zasaženo. Matematickým jazykem, ke kterému se dostaneme v kapitole 15, bychom prohlásili, že pravděpodobnost návratu stroje a umístění průstřelů spolu *korelují*.

Další Waldovou silnou stránkou byl jeho sklon k abstraktnímu myšlení. Wolfowitz, kterého Wald učil na Kolumbijské univerzitě, napsal, že Wald dával přednost „těm nejvíce abstraktním problémům“ a „vždy byl ochoten mluvit o matematice, ale nezajímala jej popularizace ani speciální aplikace“.

Je pravda, že kvůli své osobnosti Wald těžko dokázal zaměřit svou pozornost na aplikované problémy. Podrobnosti o letadlech a kanonech byly z jeho hlediska pouhou vycpávkou – okamžitě dokázal zahlédnout matematické vzpěry a nýty, které celý problém spojovaly. Kvůli takovému přístupu člověk někdy ignoruje parametry, na nichž skutečně záleží. Na druhou stranu však tento přístup umožňuje spatřit podobnou strukturu problémů, které na první pohled vypadají zcela odlišně. Matematik tedy může projevit cenné zkušenosti i v oblastech, kde by to nikdo nečekal.

Struktura na pozadí problému s průstřely z jeho hlediska odpovídá jevu, který se označuje jako *zkreslení přežitím* (survivorship bias). Uplatňuje se znovu a znovu v nejrůznějších kontextech. A jakmile jej známe stejně dobře jako Wald, jsme připraveni všimnout si jej všude, kde se ukrývá.

Třeba v investičních fondech. V oblasti hodnocení úspěšnosti fondů se rozhodně nechceme splést, ani minimálně. Posun ročního růstu o pouhé 1 % může představovat rozdíl mezi cenným finančním aktivem a propadákem. Fondy z kategorie Large Blend analytické firmy Morningstar, které investují do velkých společností (zpravidla ze seznamu S&P 500), bychom asi zařadili do první kategorie. Fondy z této skupiny v letech 1995 až 2004 vzrostly v průměru o 178,4 %, což představuje slušných 10,8 % ročně.* Pokud máte volné finanční prostředky, asi byste tedy měli do těchto fondů investovat.

Po pravdě řečeno neměli. Studie firmy Savant Capital z roku 2006 asi trochu zchladí vaše nadšení. Znovu se zamyslete nad tím, jak Morningstar počítá své výsledky. V roce 2004 vezme všechny fondy zařazené do třídy Large Blend a zjistí, o kolik za posledních deset let vzrostly.

Něco tady však chybí: *fondy, které ve skupině nejsou*. Podílové fondy netrvají věčně. Některé se rozvíjejí a jiné upadají. Končí převážně takové, které nevydělávají. Když tedy hodnotu podílových fondů v uplynulé dekádě posuzujeme podle fondů, které

---

* Je ovšem potřeba dodat, že samotný index S&P 500 se zvýšil ještě více a za stejné období si připsal 212,5 %.

na konci desetiletého období stále existují, je to podobné, jako když úhybné manévry svých pilotů hodnotíme počtem průstřelů letadel, která se vrátila na základnu. Co by to znamenalo, kdyby žádné zachovalé letadlo nemělo více než jeden průstřel? Nebylo by to tím, že se naši piloti dokážou bravurně vyhýbat nepřátelským střelám, ale tím, že dvakrát zasažená letadla se zřítila v plamenech.

Studie firmy Savant zjistila, že když do hodnocení kromě zachovalých fondů zahrneme i ty zrušené, ziskovost klesne na 134,5 %, což odpovídá mnohem přízemnějším 8,9 % ročně. Potvrzují to i pozdější výzkumy: podrobná studie z roku 2011 v časopise *Review of Finance*, která analyzovala více než 5000 fondů, zjistila, že návratnost 2641 přeživších fondů je asi o 20 % vyšší oproti hodnotě, kterou lze získat zahrnutím fondů, které mezitím ukončily činnost. Investory možná rozsah tohoto zkreslujícího efektu zaskočil, ale Abraham Wald by určitě překvapen nebyl.

Matematika je pokračováním zdravého rozumu s použitím jiných prostředků

V tuto chvíli mě moje mladá studentka pravděpodobně přeruší a docela případně se zeptá: a kde je tady matematika? Wald byl samozřejmě matematik a nelze popřít, že jeho řešení problému s průstřely letadel bylo důvtipné, ale co je na něm matematického? Neviděli jsme zde žádnou trigonometrickou identitu, žádný integrál, nerovnost ani vzorec.

V prvé řadě: Wald se vzorci pracoval. Příběh jsem vyprávěl bez nich, protože šlo pouze o úvod. Knížky, které vysvětlují lidskou reprodukci malým dětem, se vyhýbají pikantním technickým podrobnostem toho, jak se miminko dostane do maminčina bříška. Místo toho začínají přibližně takovým způsobem: „Celá příroda se mění. Stromy na zimu shazují listí, aby se na jaře znovu zazelenaly, a housenky tvoří kukly, ze kterých se líhnou překrásní motýli. I my lidé jsme součástí přírody…“

V té části knihy se právě nacházíme.

Jenže my jsme už dospělí. Na okamžik tedy odhrňme decentní závoj a ukažme, jak vypadala jedna strana ze skutečné Waldovy zprávy:

lze získat dolní mez Qi. Zde předpokládáme, že pokles z qi na qi+1 leží v určitém limitu.

Můžeme tedy zjistit horní i dolní mez Qi.

Předpokládáme, že

$$\lambda_1 q_i \leq q_{i+1} \leq \lambda_2 q_i \,,$$

kde λ1 < λ2 < 1 a tyto hodnoty jsou takové, že výraz

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\lambda_1^{\frac{j(j-1)}{2}}} < 1 - a_o \qquad (A)$$

platí.

Přesné řešení lze najít obtížně, ale blízký odhad horní a dolní meze Qi pro i < n je možné získat následujícím postupem. Používá se tato množina hypotetických dat:

$a_o = .780$	$a_3 = .010$
$a_1 = .070$	$a_4 = .005$
$a_2 = .040$	$a_5 = .005$
$\lambda_1 = .80$	$\lambda_2 = .90$

Podmínka A je splněna, protože pomocí substituce

$$.07 + \frac{.04}{.8} + \frac{.01}{(.8)^3} + \frac{.005}{(.8)^6} + \frac{.005}{(.8)^{10}} = .20529 \,,$$

což je méně než

$$1 - a_o = .22 \,.$$

Dolní limit Qi

Nejdříve je nutné vyřešit rovnici 66.

Za tímto účelem je potřeba najít kladné kořeny g0, g1, g2, g3 následujících čtyřech rovnic.

Doufám, že vás to příliš nešokovalo.

K porozumění samotnému *principu* Waldovy úvahy však tento matematický formalismus nepotřebujeme. Již jsme vše vysvětlili a žádnou matematickou notaci jsme přitom nepoužili. Otázka mé studentky tedy nadále čeká na odpověď. Kde se tady uplatňuje matematika? Nestačí jen zdravý rozum?

Ano. Matematika se skutečně *rovná* zdravému rozumu. Na určité základní úrovni je to jasné. Jak někomu vysvětlíte, proč sečtením sedmi a pěti předmětů dostanete stejný výsledek, jako když k pěti věcem přidáte sedm? To nejde: když sčítáme nějaká čísla, tento fakt prostě automaticky předpokládáme. Matematici s oblibou pojmenovávají jevy, které vnímáme na úrovni zdravého rozumu: místo aby prohlásili, že „*jedno* číslo přičtené k *druhému* dá *stejný* výsledek jako *druhé* číslo přičtené k *prvnímu*“, říkají, že „sčítání je komutativní“. Případně proto, že mají rádi symboly, píší:

Pro libovolná čísla a a b platí, že a + b = b + a.

Navzdory tomuto úředně vyhlížejícímu vzorci mluvíme o faktu, kterému instinktivně rozumí každé dítě.

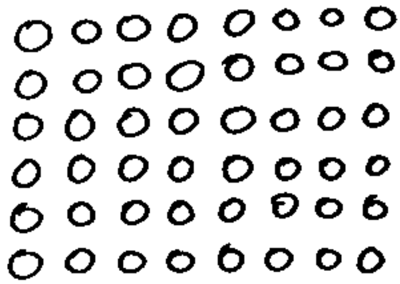
U násobení je to poněkud jinak. Vzorec vypadá docela podobně:

Pro libovolná čísla a a b platí, že a × b = b × a.

Když se zamyslíme nad tímto tvrzením, neřekneme už „to je toho“ stejně rychle jako v případě sčítání. Stačí nám „zdravý rozum“ k tomu, abychom věděli, že dvě šestice odpovídají šesti dvojicím?

Možná ne, ale můžeme svůj zdravý rozum o tento poznatek *rozšířit*. Vzpomínám si na svůj první matematický zážitek. Ležím na podlaze domu svých rodičů s tváří přitisknutou k vysokému koberci a dívám se na hi-fi věž. Nejspíš právě poslouchám druhou stranu desky Blue Album od Beatles. Můžu mít asi šest let. Protože se píší sedmdesátá léta, stereofonní aparatura má dřevěný panel s větracími otvory kruhového tvaru. Osm děr na šířku a šest na výšku. Já si tedy ležím na podlaze a koukám na ty otvory. Jsou v šesti řadách a osmi sloupcích. Podle toho, nač zaměřím svou pozornost, dokážu v mysli přepínat mezi vnímáním řad a sloupců. Šest řad, z nichž každá obsahuje osm otvorů. Osm sloupců a v každém z nich je otvorů šest.

A najednou mi to bylo jasné – osm šestic je totéž jako šest osmic. Ne proto, že bych se naučil nějaké pravidlo, ale proto, že to prostě nemohlo být jinak. Počet děr v panelu musel být stejný bez ohledu na to, jakým způsobem jsem je počítal.



STEREO MÝCH RODIČŮ V ROCE 1977

Často matematiku učíme tak, jako by se jednalo o dlouhý seznam pravidel. Žáci se učí jedno pravidlo za druhým a vědí, že je musí dodržovat, protože když to neudělají, dostanou špatnou známku. *To není matematika.* Matematika studuje věci, které vycházejí určitým způsobem, protože není možné, aby se projevily nějak jinak.

Na tomto místě si poctivě přiznejme: všechny matematické poučky nelze formulovat tak, aby byly pro naši intuici stejně průhledné jako sčítání a násobení. K derivování jen zdravý rozum nestačí. Diferenciální počet je však přesto od zdravého rozumu *odvozen* – Newton vyšel z intuitivního chápání přímého pohybu objektů, formalizoval jej a poté na něm vystavěl formální strukturu, která popisuje pohyb univerzálním matematickým jazykem. Jakmile máte Newtonovu teorii k dispozici, můžete ji aplikovat na problémy, které by bez příslušných rovnic vypadaly neřešitelně. Obdobným způsobem jsme vyvinuli mentální systémy, kterými dokážeme hodnotit pravděpodobnost nejistých výsledků. Tyto systémy jsou však dosti slabé a nespolehlivé, zejména v případě, že se jedná o mimořádně vzácné události. Tehdy můžeme svou intuici podpořit pomocí několika robustních a dobře umístěných teorémů a metod a vybudovat celou matematickou teorii pravděpodobnosti.

Speciální jazyk, kterým matematici komunikují, představuje báječný nástroj, kterým lze přesně a rychle předávat složité ideje. Protože však vypadá nesrozumitelně, nezasvěcení mají dojem, že se matematici pohybují v myšlenkovém světě, který je pro běžné uvažování zcela nepřístupný. V tom se však naprosto mýlí.

Matematiku můžeme přirovnat k protéze na atomový pohon, kterou připojujeme ke svému zdravému rozumu, abychom mnohokrát znásobili jeho dosah a sílu. Matematika má obrovskou sílu a často se vyznačuje strašidelnou notací a značnou úrovní abstrakce. Když však matematik pracuje, vynakládá podobnou duševní práci jako běžný smrtelník, který přemýšlí o přízemních problémech. Můžeme to s výhodou přirovnat k Iron Manovi, který proráží díru v cihlové zdi. Skutečnou sílu, která dokáže rozbít stěnu, neposkytují svaly Tonyho Starka, ale řada dokonale synchronizovaných servomotorů, které jsou poháněny kompaktním generátorem částic beta. Na druhou stranu Tonymu Starkovi se zdá, že prostě proráží zeď stejným způsobem, jako by brnění neměl. Jen přitom může vyvinout mnohem větší sílu.

Když budeme parafrázovat Carla von Clausewitze: matematika je pokračováním zdravého rozumu s použitím jiných prostředků.

Bez přesné struktury, jakou matematika poskytuje, nás zdravý rozum může zavést na scestí. Stalo se to armádním důstojníkům, kteří chtěli chránit ty části letadel, které již byly zabezpečené dostatečně. Formální matematika bez zdravého rozumu – bez neustálé souhry abstraktního uvažování a naší intuice ohledně množství, času, prostoru, pohybu, chování a nejistoty – by však byla pouhým sterilním cvičením v dodržování pravidel a účetnictví. Jinými slovy: matematika by odpovídala tomu, zač ji považuje vzpurná studentka z kurzu diferenciálního počtu.

Toto nebezpečí je docela reálné. John von Neumann roku 1947 ve své eseji „The Mathematician" varoval:

> Jak se matematická disciplína vzdaluje daleko od svého empirického zdroje a pokračuje stále dál, pak pokud jde o druhou a třetí generaci pouze nepřímo inspirovanou idejemi zakořeněnými ve „skutečnosti", musí čelit velmi vážným nebezpečím. Stále silněji se v ní projevuje čistá estetika a čím dál více se mění na *l'art pour l'art*. To ještě nemusí být špatné, jestliže je obor obklopen příbuznými tématy, která nadále mají úzké empirické vazby, nebo jestliže disciplínu ovlivňují lidé s výjimečně vytříbeným vkusem. Existuje však zásadní riziko, že se předmět bude rozvíjet cestou nejmenšího odporu, proud značně vzdálený od svého zdroje se rozdělí na mnoho bezvýznamných pramenů a disciplína se změní na chaotickou změť podrobností a komplikací. Jinými slovy matematickému oboru, který se hodně

vzdálí empirickému zdroji nebo prodělá hodně „abstraktního“ příbuzenského křížení, hrozí degenerace.*

Jaký druh matematiky najdete v této knize?

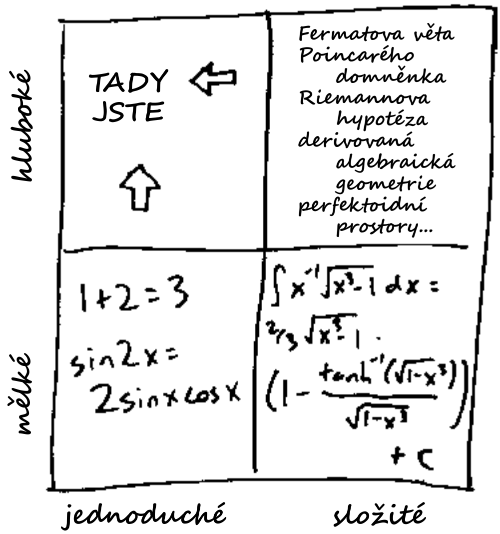
Pokud jste se s matematikou setkali jenom ve škole, získali jste o ní představu, která je velmi omezená a v určitých významných ohledech chybná. Školní matematiku tvoří převážně řada faktů a pravidel, které jsou pevně dané, pocházejí od vyšší autority a nelze je zpochybňovat. Matematické principy se považují za něco naprosto neměnného.

Matematika ovšem neměnná není. I co se týče základních objektů našeho studia, jako jsou čísla a geometrické obrazce, víme toho v porovnání s nevyřešenými otázkami stále jen velmi málo. A k současným znalostem jsme přitom dospěli teprve po značném úsilí, mnoha sporech a omylech. Autoři školních učebnic však všechnu tu námahu a zmatky pečlivě „cenzurují“.

Samozřejmě nejsou fakta jako fakta. Nikdy se příliš nezpochybňovalo, že 1 + 2 = 3. Jinou věcí je otázka, *jak a zda můžeme skutečně dokázat*, že vztah 1 + 2 = 3 platí. K tomuto problému, který patří na nejasné pomezí matematiky a filozofie, se vrátíme na konci knihy. Je ovšem jasné, že výpočet je správný. Nejistota leží někde jinde. Při našem výkladu si ji několikrát uvědomíme.

Matematická fakta mohou být jednoduchá či složitá a zároveň mohou být plytká nebo zásadní. Matematický svět tak můžeme rozdělit na čtyři kvadranty:

* Von Neumannův pohled na povahu matematiky je sice podložený, ale přesto se můžeme poněkud ošívat, když matematiku uplatňovanou jen kvůli estetickému hledisku označuje jako „degenerovanou“. Von Neumann svůj text napsal pouhých deset let poté, co v Hitlerově Berlíně proběhla výstava *entartene Kunst* („degenerovaného umění“), která měla ukázat, že *„l'art pour l'art“* je něco, co mají rádi Židé a komunisté a co stojí v protikladu ke zdravému „realistickému“ umění, jaké potřebuje silný teutonský stát. Kvůli těmto souvislostem bychom asi měli na matematiku, která neslouží žádnému zjevnému účelu, pohlížet poněkud shovívavěji. Autor jiného politického smýšlení než já by měl asi na tomto místě potřebu von Neumanna hájit tím, že odvedl hodně práce při vývoji a nasazení jaderných zbraní.



Základní aritmetické fakty, jako je rovnice 1 + 2 = 3, jsou jednoduché a plytké. Do stejné kategorie patří i základní identity jako sin(2x) = 2 sin x cos x nebo kvadratická rovnice: chceme-li se o jejich platnosti přesvědčit, dá to trochu více práce než u vztahu 1 + 2 = 3, ale celkově nemají přílišný koncepční význam.

Když se přesuneme do třídy komplikovaných a zároveň mělkých problémů, řešíme například násobení dvou desetimístných čísel, výpočet složitého určitého integrálu, nebo – po několika ročnících univerzity – Frobeniův teorém v modulární formě mikroprocesoru 2377. Je pravděpodobné, že z nějakého důvodu budeme potřebovat odpověď na problém toho typu. Jeho ruční řešení by přitom nepochybně bylo velmi nepříjemné, nebo dokonce nemožné. V případě modulární formy je přitom dokonce nutné mít poměrně hluboké znalosti, aby člověk vůbec pochopil, co má dělat. Znalost odpovědí na takové otázky však nijak nepřispívá k našim znalostem o světě.

V kvadrantu komplikovaných a zásadních otázek se snaží většinu času trávit profesionální matematici. Zde se nacházejí slavné teorémy a domněnky: Riemannova hypotéza, Fermatova poslední věta,* Poincarého domněnka, P versus NP problémy, Gödelův teorém… Každý z uvedených teorémů souvisí s hlubokými idejemi, má

* Profesionálové ji nyní nazývají Wilesův teorém, protože ji nedokázal Fermat, ale teprve Andrew Wiles (se zásadní pomocí Richarda Taylora). Tradiční název se však patrně nikdy nepodaří vymýtit.

zásadní význam a vyznačuje se úchvatnou krásou a hrozivou technickou náročností. O každém z nich lze přitom napsat samostatnou knihu.

V této knize se jimi však zabývat nebudeme. Zůstaneme v levém horním kvadrantu – v oblasti jednoduchých, ale přitom zásadních otázek. Budeme se zabývat matematickými idejemi, které může přímo a efektivně uplatnit kdokoli, ať už svou matematickou průpravu skončil ještě před algebrou, nebo mnohem později. A nejde přitom o „pouhá fakta" jako u jednoduchých aritmetických výrazů, ale jedná se o principy, které lze aplikovat mnohem šířeji a nejen ve sféře, kterou jsme si zvykli považovat za matematiku. Když se tyto praktické nástroje naučíme správně používat, pomohou nám vyvarovat se omylů.

Čistá matematika může připomínat klášter – jedná se o tiché místo, které je bezpečně izolováno před škodlivými vlivy chaotického a proměnlivého světa. Já jsem vyrůstal uvnitř takových zdí. Jiné děti s matematickým talentem přitahovaly aplikace fyziky, genomika nebo černá magie správy investičních fondů, ale já jsem o žádné takové přízemní věci neměl zájem.* Při studiu matematiky jsem se zaměřil na teorii čísel, kterou Gauss označil za „královnu matematiky". Tento vůbec nejčistší obor bychom mohli přirovnat k uzamčené zahradě v samém srdci kláštera. Návštěvníci této zahrady tam hloubají nad stejnými otázkami ohledně čísel a rovnic, které trápily už staré Řeky, a za uplynulých 21 století se příliš nevyjasnily.

Nejdříve jsem se zabýval klasickou částí teorie čísel a dokazoval jsem vlastnosti sum čtvrtých mocnin celých čísel. Když nebylo vyhnutí, mohl jsem svou práci vysvětlit i svým příbuzným, i když postup dokazování už jsem jim objasnit neuměl. Zanedlouho mě však přilákaly ještě abstraktnější sféry a vrhl jsem se na zkoumání problémů, které se točily kolem objektů typu „reziduálně modulárních Galoisových reprezentací", „kohomologie modulárních schémat", „dynamických systémů homogenních prostorů" a podobných věcí. O nich jsem si už mohl promluvit pouze s lidmi, kteří se pohybují ve stejném prostředí přednáškových síní a pracoven univerzit od Oxfordu přes Princeton, Kjóto, Paříž až po Madison ve státě Wisconsin, kde nyní působím jako profesor. Když vám řeknu, že tato problematika je vzrušující, smysluplná a krásná, a přemýšlení o ní mě nikdy nepřestane bavit, musíte mi prostě věřit.

* Musím přiznat, že po dvacátém roce věku jsem nějaký čas přemýšlel o tom, že bych mohl psát uměleckou beletrii. Dokonce jsem opravdu napsal jeden umělecký román (s názvem *The Grasshopper King*), který vyšel tiskem. Při jeho tvorbě jsem si však uvědomil, že každý den věnovaný uměleckému psaní jsem z poloviny strávil bloumáním, kdy jsem litoval toho, že se nevěnuji matematickým problémům.

Studenti totiž musí projít dlouhým vzděláním, než se vůbec dostanou na takovou úroveň, aby si příslušné objekty dokázali představit.

Stalo se však něco překvapivého. Jak jsem se při svém výzkumu pouštěl do stále abstraktnějších oblastí daleko od běžného života, stále více jsem si uvědomoval, nakolik se matematické zákonitosti projevují ve světě za zdmi mého útočiště. Nešlo o Galoisovy reprezentace ani kohomologii, ale o principy, které byly jednodušší a starší, ale přitom stejně hluboké – o levý horní kvadrant koncepčního schématu. O tom, jak svět vypadá matematickým pohledem, jsem začal psát články do časopisů a novin. Ke svému překvapení jsem zjistil, že moje texty ochotně čtou i lidé, kteří o sobě tvrdí, že matematiku nenávidí. Čtenáře jsem učil matematiku, ale úplně jinak, než učím své univerzitní studenty.

Podobně jako ve svém univerzitním kurzu jsem však čtenářům zadával jisté úkoly. Vraťme se ještě k von Neumannově eseji „The Mathematician“:

„Těžší je porozumět konstrukci letadla a teoriím o silách, díky nimž se letadlo vznáší a pohybuje, než do letadla pouze nastoupit a nechat se někam přepravit – nebo je dokonce pilotovat. Je zvláštní, že člověk by měl všechny principy pochopit, aniž by se předtím podrobně seznámil s tím, jak se projevují a využívají, aniž by je vstřebal instinktivním a empirickým způsobem.“

Jinými slovy: je docela obtížné *porozumět* matematice bez toho, že bychom něco *spočítali*. Ke geometrii nevede žádná královská cesta, jak řekl Eukleides Ptolemaiovi nebo (podle jiného zdroje) Menaechmus Alexandru Velikému. (Buďme upřímní: slavné výroky připisované dávným učencům jsou pravděpodobně smyšlené, ale kvůli tomu nejsou o nic méně poučné.)

V této knize vám nebudu předvádět velkolepé matematické monumenty a vybízet vás, abyste je zdálky obdivovali. Místo toho si vyhrneme rukávy a něco spočítáme. Když si to výklad vyžádá, uvedu několik vzorců a rovnic. K jejich pochopení však nebude potřeba žádná formální matematika nad rámec základní aritmetiky, ačkoli hodně matematických problémů přesahujících aritmetiku vysvětlíme. Načrtneme také nějaké orientační grafy a schémata. Setkáme se s tématy školní matematiky, avšak mimo jejich běžnou doménu. Uvidíme, jak trigonometrické funkce popisují rozsah, v jakém souvisejí dvě proměnné, co nám diferenciální počet může říci o vztazích mezi lineárními a nelineárními jevy a jak kvadratická funkce může posloužit jako kognitivní model vědeckého bádání. Dostaneme se také k těm částem matematiky, které obvykle musí čekat na univerzitní úroveň či ještě déle, například ke krizi teorie množin, která zde poslouží jako určitá metafora právního působení Nejvyššího soudu

USA a působení baseballových rozhodčích, nedávnému vývoji v analytické teorii čísel, který dokládá vzájemné vztahy mezi strukturou a náhodností, a teorii informací a kombinatorickým schématům, kterými lze vysvětlit, jak skupina studentů MIT vyhrála miliony dolarů díky tomu, že pochopila principy massachusettské státní loterie.

Občas narazíme na drby týkající se slavných matematiků a na několika místech se pustíme do filozofických spekulací. Dokonce si předvedeme jeden či dva důkazy. Nebudeme však zadávat žádné domácí úkoly ani testy.

ČÁST I

LINEARITA

Obsah této části: Lafferova křivka, jednostránkové vysvětlení diferenciálního počtu, zákon velkých čísel, různé analogie týkající se terorismu, „v roce 2048 budou všichni Američané obézní", proč se v Jižní Dakotě vyskytují nádory mozku častěji než v Severní Dakotě, duchové zmizelých množství, zvyk definic

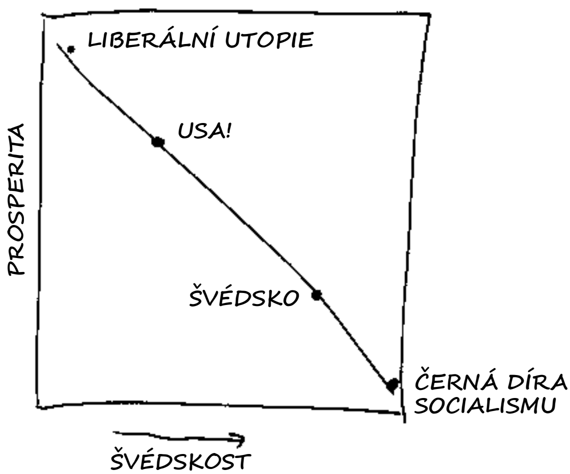
JEDNA

MÉNĚ PODOBNÉ ŠVÉDSKU

Před několika lety, kdy se v USA naplno rozhořela bitva o zákon Affordable Care Act o všeobecné zdravotní péči, zveřejnil Daniel J. Mitchell z liberálního institutu Cato Institute příspěvek na blogu s provokativním názvem: „Proč se Obama snaží Spojené státy více připodobnit Švédsku, když Švédi od švédského modelu ustupují?"

To je dobrá otázka! Když ji formulujeme tímto způsobem, vypadá to docela zvrácené. Pane prezidente, proč jdete proti proudu dějin, když státy s rozvinutým sociálním systémem po celém světě – dokonce i to malé a bohaté Švédsko – omezují rozsáhlé sociální výhody a snižují daně? „Pokud se Švédi ze svých chyb poučili a snaží se nyní velikost a rozsah svého sociálního státu zmenšit," píše Mitchell, „proč jsou američtí politici odhodláni jejich omyly opakovat?"

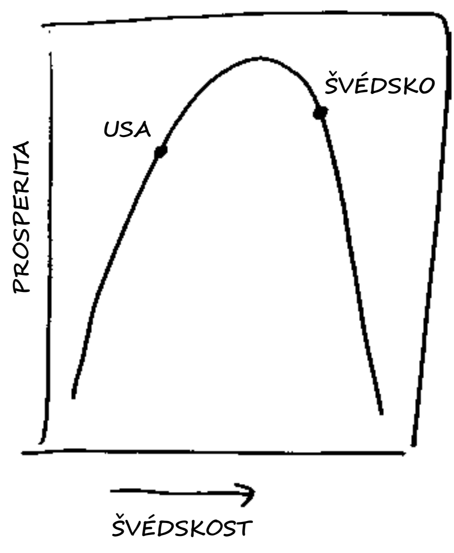
Chceme-li na tuto otázku odpovědět, budeme potřebovat mimořádně vědecký graf. Nejdříve si ukažme, jak vypadá svět podle pracovníků Cato Institute:



Osa x představuje švédskost* a osa y nějak měří prosperitu. Zatím neřešme, jak přesně tyto veličiny kvantifikujeme. Princip je jednoduchý: podle tohoto grafu platí, že čím více švédskosti, tím je na tom země hůře. Švédi samozřejmě nejsou hloupí a přišli na to také, takže se vydali směrem doleva nahoru na cestu k volnotržní prosperitě. Prezident Obama však míří špatným směrem – dolů.

Nyní načrtněme stejné schéma z pohledu lidí, jejichž ekonomické názory jsou bližší prezidentu Obamovi než ústavu Cato Institute:

Z tohoto obrázku můžeme získat úplně jinou představu o tom, jaká úroveň švédskosti je pro nás nejlepší. Kde dosáhneme největší prosperity? V jistém bodě, který je více švédský než USA, ale méně švédský než samotné Švédsko. Pokud platí tento nákres, Obama zcela oprávněně posiluje americký sociální stát, zatímco Švédi ten svůj redukují.



Rozdíl mezi dvěma obrázky spočívá v rozdílu mezi linearitou a nelinearitou, což je jeden ze zásadních matematických protikladů. Křivka institutu Cato je definována přímkou,** zatímco ta druhá – s hrbem uprostřed – nikoli. Přímka patří mezi křivky, ale jedná se o speciální typ. Přímky se přitom vyznačují nejrůznějšími speciálními vlastnostmi, které obecné křivky nemají. Nejvyšší bod na úsečce – v tomto případě

* „Švédskost" zde označuje „rozsah sociálních služeb a zdanění", nikoli jiné charakteristiky Švédska, jako je „snadná dostupnost sleďů v desítkách různých omáček", v čemž by se Švédsku všechny ostatní země samozřejmě měly snažit vyrovnat.

** Nebo úsečkou, pokud vám na tom záleží. Rozdíl zde nebudeme příliš rozebírat.

bod maximální prosperity – musí být na jednom z jejích konců. Tak se úsečky prostě chovají. Pokud je snižování daní výhodné z hlediska prosperity, pak výraznější snížení daní je ještě lepší. A pokud se Švédi chtějí své švédskosti zbavit, měli bychom to udělat také. Expertní skupina opačného názorového zaměření než Cato by mohla hlásat, že přímka je orientována opačně a směřuje z levého dolního do pravého horního rohu grafu. A pokud by čára vypadala takto, mohli bychom sociální výdaje zvyšovat bez omezení. Optimální politiku bychom mohli popsat jako Maximální švédskost.

Když o sobě někdo tvrdí, že „nemyslí lineárně“, asi se vám chce omluvit, že ztratil něco, co jste mu půjčili. Nelinearita však opravdu existuje! V tomto kontextu je nelineární myšlení klíčové, protože ne každá křivka je rovná. Když se chvíli zamyslíme, uvědomíme si, že skutečné křivky v ekonomii vypadají tak jako na druhém obrázku a nikoli na tom prvním. Nejsou lineární. Mitchellova úvaha představuje příklad *mylné linearity* – aniž by to výslovně přiznal, předpokládá, že vývoj prosperity lze popsat úsečkou na prvním obrázku. V tom případě by platilo, že když svou sociální infrastrukturu omezuje Švédsko, měli bychom dělat totéž i my v USA.

Jakmile však připustíme, že sociálního státu může být jak příliš mnoho, tak i příliš málo, dojde nám, že lineární obrázek je chybný. Uplatňuje se složitější závislost než taková, kterou bychom mohli vyjádřit sloganem „více státu je špatné, méně státu je dobré“. Stejné situaci čelili i generálové, kteří se obrátili na Abrahama Walda: letadlům s příliš tenkým pancířem hrozilo sestřelení, ale příliš silně chráněná letadla by vůbec nemohla vzlétnout. Otázka nestojí tak, zda je vhodné pancíř posílit, či redukovat. Správná volba závisí na tom, od jak silně pancéřovaného letadla vycházíme. Pokud existuje optimální řešení, nachází se někde uprostřed a není vhodné se od něj vzdálit ani na jednu stranu.

Nelineární uvažování znamená, že *náš směr by měl záviset na tom, kde se již nacházíme*.

Tento postřeh není nový. Již z římských dob pochází slavná Horatiova poznámka „*Est modus in rebus, sunt certi denique fines, quos ultra citraque nequit consistere rectum*“ („Ve věcech existuje míra. Jsou určité hranice, mimo něž nemůže existovat to, co je správné“). A ještě dříve si Aristotelés ve své *Etice Níkomachově* povšiml, že zdravotnímu stavu škodí jak příliš málo, tak i příliš mnoho jídla. Optimum leží někde uprostřed, protože závislost mezi příjmem potravy a zdravím není lineární, ale křivková. Při obou extrémech se totiž člověk dostává do problémů.

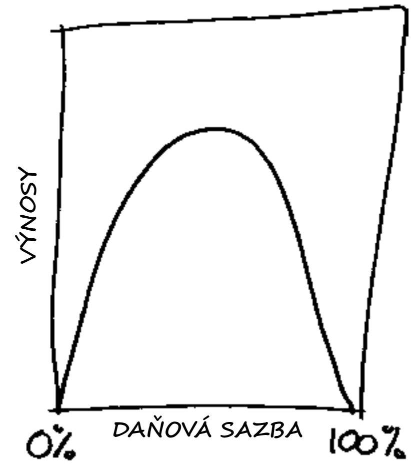
Magická ekonomie

Ironií osudu ekonomičtí konzervativci, jako jsou pracovníci institutu Cato, kdysi těmto principům rozuměli nejlépe. Víte, co představuje ten druhý graf? Ten vědecky vyhlížející, s hrbem uprostřed? Nejsem první, kdo jej nakreslil. Označuje se jako *Lafferova křivka* a v ekonomické politice Republikánské strany hraje zásadní roli již téměř čtyřicet let. V polovině Reaganova působení v úřadu prezidenta se křivka v ekonomických diskuzích již natolik etablovala, že ji Ben Stein zahrnul do své improvizované přednášky ve filmové komedii *Volný den Ferrise Buellera* (Ferris Bueller's Day Off):

> Víte někdo, co to je? Studenti! Ví to někdo z vás? Přihlásí se někdo? Už jste to někdy viděli? Je to Lafferova křivka. A víte, co znamená? Jde o to, že v tomto místě křivky daňových výnosů získáte přesně stejně peněz jako v tomto místě. To je hodně kontroverzní. Vzpomenete si, jak to roku 1980 nazval viceprezident Bush? Přihlásí se někdo? Ně-ja-ká ekonomie. Magická ekonomie.

O Lafferově křivce se vypráví tato historka: Arthur Laffer, který tehdy působil jako profesor ekonomie na Chicagské univerzitě, v roce 1974 v elegantní hotelové restauraci ve Washingtonu večeřel s Dickem Cheneym, Donaldem Rumsfeldem a redaktorem novin *Wall Street Journal* Judem Wanniskim. Dohadovali se o daňový plán prezidenta Forda, a když se diskuze hodně přiostřila, Laffer udělal to, co intelektuálové v takových chvílích dělají – vytáhl ubrousek* a nakreslil schéma. Obrázek vypadal takto:

* Laffer zmínku o ubrousku zpochybňuje. Pamatuje si, že v restauraci měli elegantní látkové ubrousky, které by se nikdy neodvážil zničit nějakou ekonomickou čmáranicí.



Na vodorovné ose je úroveň zdanění a svislá osa znázorňuje úroveň daňových výnosů, které vláda získává od poplatníků. Na levé straně začíná graf daňovou sazbou 0 %. V tomto případě z definice stát nemá žádné daňové příjmy. Na pravé straně dosahuje daňová sazba 100 %. Ať už máte jakýkoli příjem – ze svého podnikání nebo z platu, který dostáváte –, vše jde přímo do pokladnice ministerstva financí.

Která je ovšem prázdná. Když totiž stát vysaje každý cent vašich příjmů, které získáváte za to, že docházíte učit studenty, prodávat hardware nebo řídit tým, proč byste se vlastně měli obtěžovat? Na samém pravém konci grafu lidé vůbec nepracují. Případně pokud pracují, zapojují se do neformální šedé ekonomiky, kam ruka berňáku nedosáhne. Státní příjmy z daní jsou opět nulové.

Určité příjmy z daní stát získává ve střední oblasti křivky, kde je daňové zatížení vyšší než nulové, ale nedosahuje celkové výše příjmů – jinými slovy v oblasti, která odpovídá reálnému světu.

To znamená, že křivka zachycující vztah mezi daňovou sazbou a státními příjmy z daní nemůže být přímá. V takovém případě by byly příjmy na levém nebo pravém okraji grafu maximální, ale v obou těchto případech jsou přitom nulové. Jestliže se aktuální daň z příjmu hodně blíží nule, takže se nacházíme v levé části grafu, pak zvýšením daní může stát získat více peněz, z nichž může financovat vládní služby a programy. To odpovídá našemu intuitivnímu očekávání. Pokud však daňová sazba není příliš daleko od 100 %, při zvýšení daní ve skutečnosti státní příjmy *poklesnou*. Jsme-li napravo od vrcholu Lafferovy křivky a chceme-li omezit deficit, aniž bychom krátili výdaje, můžeme využít jednoduché a politicky lákavé řešení: snížit daňovou sazbu a tím zvýšit příjmy, které plynou do státního rozpočtu. Jak jsme již uvedli, *náš směr by měl záviset na tom, kde se již nacházíme.*

Kde tedy jsme? Tady začínají nesnáze. V roce 1974 se nejvyšší sazba daně z příjmu rovnala 70 % a názor, že USA jsou v pravé sestupné části Lafferovy křivky, byl do jisté míry přitažlivý – zejména pro těch několik šťastlivců, kteří platili daně v této sazbě, jež se vztahovala pouze na příjmy nad prvních 200 000 USD ročně.* A Lafferova křivka našla svého horlivého zastánce: Wanniski tuto teorii dostal do povědomí veřejnosti díky své knize, kterou roku 1978 vydal pod poněkud arogantním názvem *The Way the World Works* (Jak svět funguje).** Wanniski skutečně věřil tomu, co hlásal. Dokázal vhodně zkombinovat ideový zápal a politický instinkt, takže jeho ideu, kterou za poněkud vyšinutou považovali i zastánci snižování daní, začali lidé přijímat. Vůbec mu nevadilo, že jej někteří označují za cvoka. „Mimochodem co to znamená, že jsem cvok?“ zeptal se při jednom rozhovoru. „Thomas Edison byl cvok, Leibniz byl cvok, Galileo byl cvok, a tak dále. Za cvoka je považován každý, kdo přijde s novou myšlenkou, která narušuje dosavadní způsob uvažování a která leží daleko od hlavního proudu.“

(Na okraj: zde je důležité upozornit, že lidé s nekonvenčními myšlenkami, kteří sami sebe přirovnávají k Edisonovi a Galileovi, *nikdy nemají pravdu*. Dopisy psané v tomto stylu dostávám alespoň jednou měsíčně. Obvykle je posílají lidé, kteří mají „důkazy“ matematických tvrzení, o nichž je již stovky let známo, že jsou chybné. Mohu vám zaručit, že Einstein neříkal všem okolo: „Podívejte, vím, že tahle obecná teorie relativity vypadá bláznivě, ale to tvrdili i o Galileovi!“)

Lafferovu křivku lze jednoduše znázornit a popisuje jev, který zdánlivě odporuje naší intuici. Díky tomu přišla velmi vhod politikům, kteří se ke snižování daní přikláněli již předtím. Jak to formuloval ekonom Hal Varian: „Můžete ji kongresmanovi vysvětlit za šest minut a poté o ní dokáže mluvit šest měsíců.“ Wanniski se nejdříve stal poradcem Jacka Kempa a poté Ronalda Reagana, jehož ekonomické názory formovaly zkušenosti, které získal o čtyři dekády dříve jako bohatá filmová hvězda 40. let. Jeho rozpočtový šéf David Stockman vzpomíná:

> [Reagan] často opakoval: „Mezi boháče jsem se dostal při natáčení filmů za druhé světové války.“ V té době kvůli válečné přirážce dosahovala daň z příjmu 90 %. „Mohli jste zahrát jen ve čtyřech filmech a už jste byli v nejvyšším

* Někde mezi půl milionem a jedním milionem dolarů ročně v dnešních cenách.

** Sebevědomí mu rozhodně nechybělo.

pásmu," pokračoval. „Všichni jsme tedy po čtvrtém filmu přestali pracovat a odjeli jsme na venkov." Kvůli vysokým daním lidé méně pracovali. Nízké daně vedly k tomu, že lidé pracovali více. Věděl to z vlastní zkušenosti.

V současnosti sotva najdeme renomovaného ekonoma, který by se domníval, že se nacházíme na sestupné části Lafferovy křivky. To by nás nemělo překvapovat vzhledem k tomu, že nejvyšší příjmy jsou nyní zdaněny pouhými 35 %, což je sazba, která by po většinu dvacátého století lidem připadala absurdně nízká. Ale dokonce i v Reaganově éře jsme pravděpodobně byli vlevo od vrcholu křivky. Greg Mankiw, ekonom z Harvardovy univerzity a republikán, který předsedal Radě ekonomických poradců druhého prezidenta Bushe, ve své učebnici mikroekonomie píše:

> Další historický vývoj neprokázal Lafferovu domněnku, že nižší daňové sazby povedou ke zvýšení daňových příjmů. Když Reagan po svém zvolení snížil daně, daňové výnosy se nezvýšily, ale snížily. Příjem z daní z osobních příjmů (na osobu, korigovaný na inflaci) poklesl v letech 1980 až 1984 o 9 %, ačkoli průměrný příjem (opět na osobu a korigovaný na inflaci) ve stejném období vzrostl o 4 %. Jenže jakmile daňové škrty začaly platit, bylo těžké zase je zrušit.

Nyní bychom měli pro zastánce ekonomie strany nabídky projevit trochu pochopení. V prvé řadě cílem daňové politiky nemusí být maximalizace státních příjmů. Milton Friedman, o kterém jsme se naposledy zmínili v souvislosti s tím, že za druhé světové války pracoval na utajovaném vojenském projektu Statistical Research Group, později získal Nobelovu cenu, radil několika americkým prezidentům a stal se významným propagátorem nízkých daní a ekonomického liberalismu. Ohledně daní se Friedman proslavil výrokem: „Jsem zastáncem snižování daní za všech okolností a pod jakoukoli záminkou, z libovolného důvodu a kdykoli je to možné." Podle jeho názoru bychom neměli hledat vrchol Lafferovy křivky, kde jsou státní daňové výnosy maximální. Friedman byl přesvědčen, že stát peníze, které dostane, nakonec kompletně utratí, a tyto prostředky přitom zpravidla vynakládá nepříliš efektivním způsobem.

Umírněnější zastánci ekonomie strany nabídky, jako je Mankiw, argumentují, že nižší daně mohou lidi lépe motivovat k tomu, aby pilně pracovali a zakládali firmy. To nakonec vede k větší a silnější ekonomice, i když se snížení daní bezprostředně projevuje nižšími vládními příjmy a vyšším deficitem rozpočtu. Ekonom, který je větším příznivcem redistribuce, by mohl poznamenat, že škrty působí obousměrně: je možné, že kvůli své nižší schopnosti utrácet stát méně investuje do infrastruktury, nedokáže účinně bojovat s finančními podvody a obecně vykonává méně činností, díky nimž se může dařit volnému podnikání.

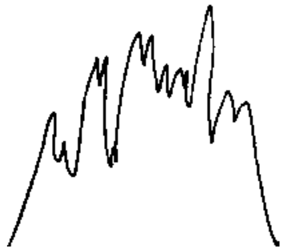
Mankiw také upozorňuje, že velmi bohatí lidé – ti, kteří dříve odváděli 70 % z nejvyššího pásma svých příjmů – po Reaganových daňových škrtech skutečně platili *vyšší* daně.* To vede k poněkud nepříjemné možnosti, že pokud chce stát maximalizovat své příjmy, měl by zvýšit daně střední třídě, které nezbývá nic jiného než dále pracovat. Bohatým lidem je lepší daně snížit. Nahromadili již totiž tolik peněz, že mohou věrohodně pohrozit, že pokud je stát bude zdaňovat podle jejich názoru příliš vysokou sazbou, přestanou investovat do místní ekonomiky nebo své prostředky převedou do zahraničí. Jestliže je tato úvaha správná, hodně levicově smýšlejících lidí dá neochotně za pravdu Miltonu Friedmanovi: maximalizace daňových příjmů možná nakonec není tak výhodná.

Mankiw poněkud diplomaticky uzavírá: „Lafferovo tvrzení není úplně nepodložené.“ Já bych Laffera ocenil mnohem jednoznačněji! Jeho graf ukazuje zásadní a nesporný matematický fakt, že vztah mezi zdaněním a výnosy nutně nemusí být lineární. Nemusí samozřejmě odpovídat jedinému plynulému vrcholu, jaký načrtl Laffer, ale může vypadat jako lichoběžník

nebo velbloudí hrby

* Obtížnější je s jistotou říci, zda byly vyšší daňové příjmy způsobeny tím, že bohatí, které daň z příjmu tolik nezatěžovala, začali více pracovat, jak předpovídá teorie strany nabídky.

nebo chaotická křivka se spoustou výchylek*



ale pokud v některém místě roste, musí v jiné své části klesat. Opravdu je možné být příliš švédský. S tímto tvrzením by žádný ekonom nepolemizoval. A jak upozornil sám Laffer, mnozí odborníci ze společenských věd tomu rozuměli již před ním. Pro většinu lidí to však úplně samozřejmé není – alespoň do chvíle, než zahlédnou schéma na ubrousku. Laffer dokonale chápal, že jeho křivka nedokáže určit, zda jsou daně v nějaké konkrétní ekonomice příliš vysoké. Proto svůj graf nedoplnil žádnými čísly. Když při parlamentním slyšení dostal otázku, kde leží optimální daňová sazba, přiznal: „Nedokážu to přesně změřit, ale mohu říci, jaké má tato sazba vlastnosti – to umím." Lafferova křivka říká pouze to, že snížení daní může za určitých okolností zvýšit daňové příjmy. Chceme-li však tyto okolnosti určit, potřebujeme k tomu hlubokou, náročnou a empirickou práci, jaká se na ubrousek nevejde.

Na Lafferově křivce není nic špatného – problém spočívá pouze v tom, jak ji lidé využívají. Wanniski a politici, kteří jeho idejím naslouchali, se stali obětí nejstaršího falešného sylogismu:

> Je *možné*, že snížení daní zvýší státní příjmy;
> *chci*, aby platilo, že snížení daní zvýší státní příjmy;
> proto *je pravda*, že snížení daní zvýší státní příjmy.

* Nebo ještě jinak: vůbec to nemusí být jediná křivka, jak pomocí složité „neo-Lafferovy křivky" ve svém jízlivém hodnocení teorie strany nabídky s názvem „The Laffer Curve" (Lafferova křivka) ilustroval Martin Gardner.

DVĚ

LOKÁLNÍ PŘÍMKA, GLOBÁLNÍ KŘIVKA

Možná si říkáte, že nepotřebujete profesionálního matematika, aby vás poučoval, že všechny křivky nejsou rovné. Lineární myšlení se však projevuje všude. Dopouštíme se jej pokaždé, když říkáme, že pokud je výhodné něco mít, je ještě lepší mít toho více. Tohoto zjednodušení využívají političtí křiklouni: „Podporujete vojenský zásah proti Íránu? Myslím, že byste chtěl provést *pozemní invazi* do každé země, jejíž představitelé *si dovolí nás kritizovat*!“ Nebo naopak: „Sblížení s Íránem? Nejspíš se *také* domníváte, že jsme se měli *Adolfu Hitlerovi* snažit *lépe porozumět*.“

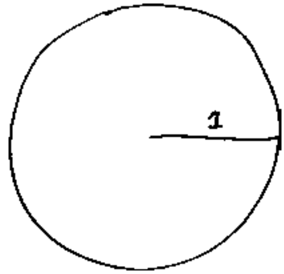
Proč je tento typ uvažování tak oblíbený, když se stačí na okamžik zamyslet, abychom si uvědomili, jak je nesprávný? Proč by se kdokoli třeba jen na okamžik domníval, že všechny křivky jsou přímé čáry, když to zjevně neplatí?

Jeden z důvodů spočívá v tom, že v jistém smyslu to vlastně platí. Tento příběh začíná u Archimeda.

Vyčerpání

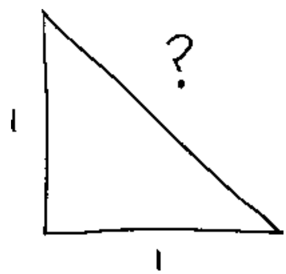
Jakou plochu má tento kruh?

V moderní době je tento problém tak banální, že bychom jej mohli najít ve školních testech. Plocha kruhu je dána vzorcem πr^2. Poloměr r se v tomto případě rovná 1, takže plocha odpovídá číslu π. Před dvěma tisíci lety se však jednalo o nepříjemnou otevřenou otázku, která byla natolik důležitá, že se na ni zaměřil samotný Archimedes.



Proč to bylo tak těžké? V prvé řadě staří Řekové nepovažovali číslo π za číslo jako my. Čísla, kterým rozuměli, patřila do množiny celých čísel, kterými bylo možné počítat předměty: 1, 2, 3, 4… Avšak ukázalo se, že již první velký úspěch řecké geometrie – Pythagorova věta* – způsobil zkázu jejich číselného systému.

Uveďme obrázek:



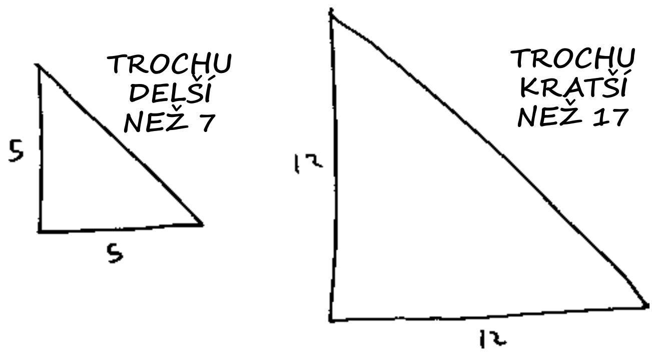
Pythagorova věta tvrdí, že obsah čtverce nad *přeponou* – stranou pravoúhlého trojúhelníka, která nesousedí s pravým úhlem – se rovná součtu čtverců nad zbývajícími dvěma stranami neboli *odvěsnami*. Na tomto obrázku to znamená, že čtverec nad přeponou má plochu $1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$. Konkrétně platí, že přepona je delší než 1 a kratší než 2 (jak se můžeme přesvědčit na vlastní oči a nepotřebujeme přitom žádnou matematickou větu). To, že délka nebyla dána celým číslem, pro Řeky samo o sobě nepředstavovalo problém. Mohli si to vysvětlit tím, že vše měřili nesprávnými jednotkami. Pokud by zvolili měrnou jednotku tak, aby byly odvěsny dlouhé 5 jednotek, mohli by pravítkem zjistit, že přepona má asi 7 jednotek. Zhruba sedm – ale je trochu delší. Čtverec nad přeponou se totiž rovná

* Mimochodem nevíme, kdo Pythagorovu větu dokázal jako první, ale vědci jsou si téměř jisti, že samotný Pythagoras to nebyl. Ve skutečnosti o něm nevíme téměř nic kromě základního faktu, který dosvědčují jeho současníci, že v šestém století před naším letopočtem žil a proslavil se vzdělaný muž tohoto jména. Základní vyprávění o jeho životě a díle pocházejí z období téměř osm set let po jeho smrti. V té době již skutečného Pythagora úplně nahradil jeho mýtus, jenž do jedné osoby shrnul filozofii všech učenců, kteří se označovali za pythagorejce.

$5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$

a pokud by přepona byla dlouhá 7 jednotek, její čtverec by měl plochu $7 \times 7 = 49$.

Případně pokud by odvěsny byly dlouhé 12 jednotek, měla by přepona téměř přesně 17 jednotek. Byla by však maličko kratší, protože $12^2 + 12^2$ je 288, což je nepatrně méně než 17^2 neboli 289.



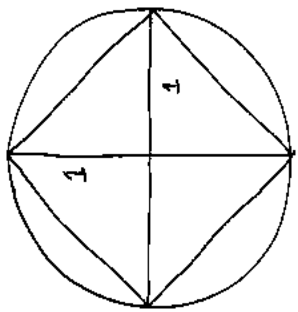
A někdy v pátém století před naším letopočtem jeden z členů pythagorejské školy zjistil šokující věc: neexistoval *žádný způsob*, jak změřit rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník tak, aby délky všech jeho stran udávala celá čísla. Dnešní matematici by řekli, že „druhá odmocnina ze dvou je iracionální číslo“, což znamená, že není určeno podílem žádných dvou celých čísel. Pythagorejci však nic takového neprohlásili. Jak by mohli? Jejich idea množství byla postavena na poměrech celých čísel. Z jejich hlediska se ukázalo, že délka té přepony *vůbec není číslo*.

To způsobilo pořádný zmatek. Je totiž potřeba připomenout, že pythagorejci byli výjimeční podivíni. Jejich filozofie představovala nesourodou směs různých prvků: některé bychom dnes zařadili do matematiky, jiné spíše do náboženství a ještě další bychom považovali za známku duševní choroby. Věřili, že lichá čísla jsou dobrá a sudá čísla zlá, že na druhé straně Slunce se nachází planeta Antichthon stejná jako naše Země a že bychom neměli jíst fazole, podle některých zpráv kvůli tomu, že ukrývají duše zemřelých lidí. O samotném Pythagorovi se říkalo, že dokáže rozmlouvat s dobytkem (zvířata mu prozradila, že nemá jíst fazole). Patřil také k nemnohým Řekům, kteří v té době nosili kalhoty.

Matematika pythagorejců byla neoddělitelně spjata s jejich ideologií. Podle legendy (asi není pravdivá, ale poskytuje dobrou představu o pythagorejském přístupu) dokázal iracionalitu druhé odmocniny ze dvou muž jménem Hippasus. Za to, že dokázal takový nechutný teorém, jej jeho kolegové vrhli do moře, kde se utopil.

Objevený teorém však utopit nedokázali. Následníci pythagorejců jako Eukleides a Archimedes chápali, že si musí vyhrnout rukávy a některé objekty měřit, i když se dostanou mimo úhlednou zahrádku celých čísel. Nikdo tehdy nevěděl, zda lze pouze pomocí celých čísel vyjádřit plochu kruhu.* Kola se však musí točit a sila je nutné naplnit,** takže bylo potřeba pustit se do měření.

S původní myšlenkou přišel Eudoxos z Knidu a Eukleides ji zahrnul do dvanácté knihy svých Základů. Teprve Archimedes však celý projekt doopravdy rozvinul. Dnes jeho přístup označujeme jako *metodu vyčerpání*. A začíná se následujícím způsobem.



Čtverec na obrázku se označuje jako *vepsaný čtverec*. Každý z jeho rohů se kruhu pouze dotýká, ale jeho okraj nepřesahuje. K čemu je to dobré? Kruhy jsou totiž záhadné a hrozivé, ale se čtverci se oproti nim pracuje snadno. Pokud před sebou máme čtverec s délkou strany X, jeho plocha se rovná prostě X krát X – proto druhé mocnině čísla říkáme také čtverec (kvadrát). Základní pravidlo matematického života zní: pokud vás svět postaví před obtížný problém, pokuste se nejdříve vyřešit jednodušší problém a doufejte, že jednoduchá verze bude natolik blízká tomu původnímu problému, že vám to svět odpustí.

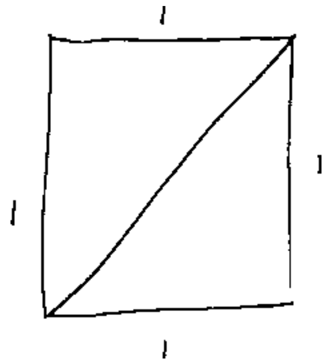
Vepsaný čtverec lze rozdělit na čtyři trojúhelníky, které přesně odpovídají rovnoramennému trojúhelníku, který jsme nakreslili před chvílí.*** Plocha čtverce je tedy čtyřikrát větší než plocha trojúhelníka. Tento trojúhelník zase vznikl tak, že jsme vzali

* Ve skutečnosti to není možné, ale až do osmnáctého století to nikdo neuměl dokázat.

** Sila až do začátku dvacátého století vlastně kulatá nebyla. Teprve tehdy profesor H. W. King z Univerzity ve Wisconsinu vyvinul nyní všudypřítomný válcový návrh, aby vyřešil problém s hnitím úrody v rozích.

*** Přesněji bychom měli říci, že každý ze čtyř dílů čtverce můžeme z původního rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka získat posunutím a otočením v rovině. Automaticky však předpokládáme, že tyto manipulace plochu geometrického útvaru nemění.

čtverec o rozměrech 1 × 1 a rozdělili jsme jej úhlopříčně napůl jako sendvič s tuňákem.

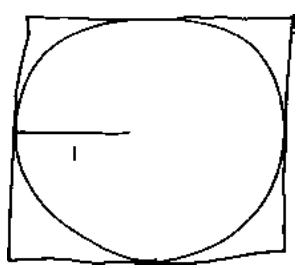


Sendvič s tuňákem měl plochu 1 × 1 = 1, takže každý poloviční trojúhelníkový sendvič má plochu 1/2 a oblast vepsaného kruhu se rovná 4 krát 1/2 neboli 2.

Mimochodem představte si, že Pythagorovu větu *neznáte*. Kouzlo – nyní ji už znáte! Nebo alespoň víte, co říká o tomto konkrétním pravoúhlém trojúhelníku. Vzhledem k tomu, že pravoúhlý trojúhelník, který ohraničuje dolní polovinu sendviče s tuňákem, je přesně stejný jako trojúhelník v levém horním rohu vepsaného čtverce. A jeho přepona odpovídá straně vepsaného čtverce. Když tedy přeponu umocníte, dostanete plochu vepsaného čtverce, která se rovná 2. Jinak řečeno délka přepony je dána číslem, které po umocnění poskytne číslo 2, nebo – když to formulujeme stručnějším běžným způsobem – se rovná druhé odmocnině ze dvou.

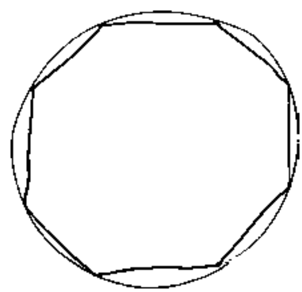
Vepsaný čtverec je zcela uzavřen uvnitř kruhu. Jestliže má plochu 2, plocha kruhu musí být *minimálně* 2.

Nyní nakreslíme jiný čtverec.



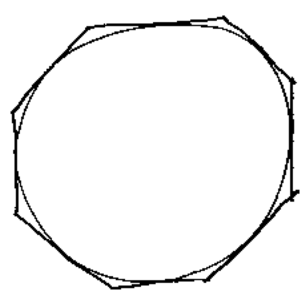
Tento čtverec se nazývá *opsaný* a také se kruhu dotýká v pouhých čtyřech bodech. Tento čtverec však kruh obklopuje zvnějšku. Jeho strany jsou dlouhé 2 jednotky, takže má plochu 4. Víme tedy, že plocha kruhu může být maximálně 4.

Důkaz toho, že číslo pí leží mezi čísly 2 a 4, možná nevypadá příliš působivě. Ale Archimedes se teprve pouštěl do práce. Nyní vezměme čtyři rohy vepsaného čtverce a na kruhu vyznačme nové body, které budou ležet v polovině mezi jednotlivými dvojicemi rohů. Získáme tak osm rovnoměrně rozmístěných bodů. Když je spojíme, dostaneme vepsaný osmiúhelník, který každému řidiči připomíná dopravní značku „stop“:



Výpočet plochy vepsaného osmiúhelníku je poněkud obtížnější a do příslušných trigonometrických operací nebudeme zabíhat. Důležité je to, že se stále jedná o úsečky a úhly, nikoli o křivky, takže to Archimedes tehdy dostupnými metodami dokázal provést. A plocha se rovná dvojnásobku druhé odmocniny ze dvou, tedy přibližně 2,83.

Stejnou zábavu si můžeme dopřát i s opsaným osmiúhelníkem

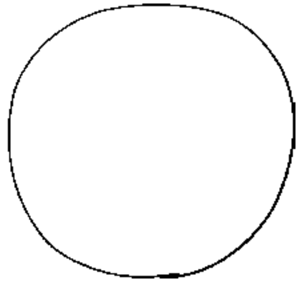


jehož plocha odpovídá $8(\sqrt{2} - 1)$, a je tedy o něco větší než 3,31.

Plocha kruhu je tedy vymezena intervalem od 2,83 do 3,31.

Na tomto místě samozřejmě nemusíme skončit. Můžeme rozmístit body mezi rohy osmiúhelníku (ať už vepsaného, nebo opsaného), abychom vytvořili šestnáctiúhelník.

Po dalších trigonometrických výpočtech zjistíme, že plocha kruhu leží mezi čísly 3,06 a 3,18. Když zopakujeme stejný postup, získáme 32úhelník. Touto cestou se brzy dostaneme k obrazci, který vypadá asi takto:

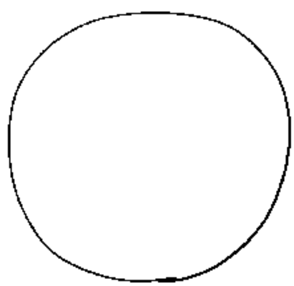


Moment, není to náhodou kruh? Samozřejmě že ne! Je to pravidelný mnohoúhelník se 65 536 stranami. To jste nepoznali?

Geniální postřeh Eudoxa a Archimeda spočíval v tom, že *není důležité*, zda máme před sebou kruh nebo mnohoúhelník s mnoha velmi krátkými stranami. Z jakéhokoli praktického hlediska budou obě plochy téměř stejné. Svou neúnavnou iterací jsme oblast malého okraje mezi kruhem a mnohoúhelníkem „vyčerpali“. Je pravda, že kruh je ohraničen křivkou. Každý drobný úsek jeho obvodu však můžeme dobře aproximovat dokonale rovnou úsečkou, stejně jako kousek zemského povrchu, na kterém stojíme, dobře aproximovat dokonale rovnou rovinou.*

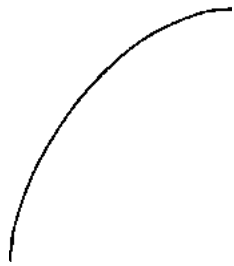
Pamatujme na slogan z názvu kapitoly: lokální přímka, globální křivka.

Nebo se na to podívejte takto. K velikému kruhu se snášíte ze značné výšky. Nejdříve vidíte celý útvar:



Potom pouze jeden segment oblouku:

* Alespoň v případě, že jako já žijete na rovinatém středozápadě USA.



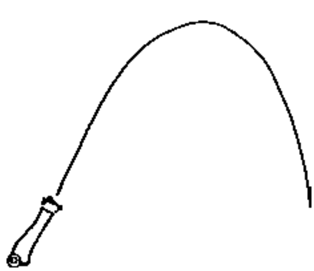
A později ještě menší segment:

Když se budete neustále přibližovat, nakonec uvidíte něco, co prakticky nelze odlišit od úsečky. Mravenec lezoucí po obvodu kruhu, který vnímá pouze své nejbližší okolí, se může domnívat, že se nachází na rovné linii, stejně jako člověk na zemském povrchu (pokud není dostatečně mazaný, aby si všímal přibližujících se objektů, které se vynořují zpoza horizontu) má pocit, že stojí na rovině.

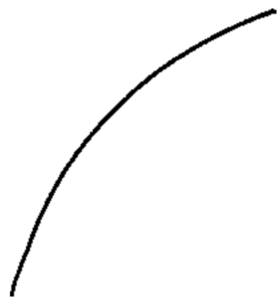
Na této stránce pochopíte diferenciální počet

Nyní se seznámíte s diferenciálním počtem. Jste připraveni? Myšlenka, za kterou vděčíme Izáku Newtonovi, spočívá v tom, že na dokonalém kruhu není nic speciálního. *Každá* plynulá křivka, když ji dostatečně přiblížíme, vypadá prostě jako přímka. Nezáleží na tom, jak je klikatá nebo spletitá – stačí, když nemá žádné ostré zlomy.

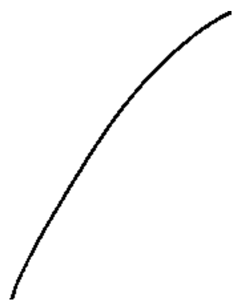
Když vystřelíte projektil, opisuje dráhu takového tvaru:



Střela letí nahoru a poté klesá dolů. Sleduje přitom parabolický oblouk. Kvůli gravitaci se všechny pohyblivé předměty vracejí směrem k zemi – to je jeden ze základních faktů našeho fyzického světa. Když však přiblížíme jeden velmi krátký úsek, křivka začne vypadat takto:



A potom takto:



Stejně jako kruh v předchozím příkladu také dráha projektilu vypadá z hlediska nedalekého pozorovatele jako přímá čára, která stoupá pod určitým úhlem. Odchylka od přímé linie, kterou způsobuje gravitace, je příliš malá, než abychom ji zaregistrovali – ale samozřejmě nezmizela. Když přiblížíme ještě menší část křivky, bude rovnou čáru připomínat ještě lépe. Stále blíže a stále rovněji, stále blíže a stále rovněji…

Nyní musíme udělat koncepční skok. Newton prohlásil, že tento postup můžeme dovést až do konce. Své zorné pole zmenšíme natolik, že bude *infinitezimální* – tak malé, že bude menší než jakákoli popsatelná jednotka, ale přitom bude mít nenulové rozměry. Oblouk projektilu nezkoumáme na velmi krátkém časovém intervalu, ale v jediném okamžiku. To, co bylo *téměř* přímkou, se změnilo na *přesnou* přímku. A směrnici této přímky Newton označil jako *fluxi* a my tomu nyní říkáme *derivace*.

Takový myšlenkový skok si Archimedes udělat nedovolil. Rozuměl tomu, že polygony se stále kratšími stranami se více a více přibližují kruhu, ale nikdy by neřekl, že kruh je skutečně *totožný* s mnohoúhelníkem, který má nekonečně mnoho nekonečně krátkých stran.

Také někteří z Newtonových současníků měli pochybnosti, zda postupuje správným směrem. Nejslavnějším kritikem byl George Berkeley, který Newtonovy infinitezimální veličiny odsoudil mimořádně posměšným tónem, který v současné matematické literatuře bohužel chybí: „Co jsou vlastně ty fluxe? Rychlosti mizejících inkrementů. A co jsou ty mizející inkrementy? Nejsou to ani konečná množství, ani nekonečně malá množství, prostě nic. Možná bychom je mohli označit za duchy zesnulých množství?“

Jenže diferenciální počet skutečně *funguje*. Když se rozmáchnete a mrštíte kamenem, poletí po lineární dráze s konstantní rychlostí* přesně tím směrem, kterým se podle diferenciálního počtu kámen pohybuje v konkrétním okamžiku, kdy jste jej uvolnili. To je další Newtonův postřeh: objekty se pohybují po přímočaré dráze, pokud je nějaká vnější síla nedonutí k tomu, aby se od ní odchýlily. V tom spočívá jeden z důvodů, proč nám lineární myšlení připadá tak přirozené: naše intuitivní chápání času a pohybu se formuje na základě jevů, které pozorujeme v okolním světě. Ještě před tím, než Newton formuloval své zákony, lidé cítili, že věci se pohybují přímočaře, pokud nemají důvod, aby se chovaly jinak.

Mizející inkrementy a zbytečné zmatky

Newtonovi kritici měli do jisté míry pravdu. Jeho konstrukce derivace neodpovídala současným přísným matematickým standardům. Problém spočívá v představě něčeho nekonečně malého, což byl pro matematiky již tisíce let poněkud nepříjemný kámen úrazu. Prvním potížistou byl Zenon, řecký filozof elejské školy žijící v pátém století př. n. l. Specializoval se na kladení zdánlivě nevinných otázek týkajících se fyzického světa, které zákonitě rozpoutávaly bouřlivé filozofické debaty.

Jeho nejslavnější paradox můžeme popsat následovně. Rozhodnu se, že si zajdu do stánku se zmrzlinou. Je jasné, že do stánku se nemohu dostat, než ujdu polovinu vzdálenosti. A jakmile jsem urazil polovinu cesty, nemohu se k zmrzlinářovu okénku dostat, dokud neujdu polovinu zbývající délky. Když se mi to podaří, stále mám před sebou polovinu vzdálenosti, která ještě zbývá. A tak dále a tak dále. Mohu se sice ke stánku se zmrzlinou přibližovat stále více, ale bez ohledu na to, kolik kroků přitom udělám, svého cíle nikdy doopravdy *nedosáhnu*. Od vysněného kornoutku se dvěma

* S odhlédnutím od účinků gravitace, odporu vzduchu atd. Na krátké časové škále je však lineární aproximace dostatečně přesná.

kopečky mě pořád bude dělit nějaká malá, ale nenulová vzdálenost. Zenon tedy uzavřel, že ke stánku se zmrzlinou nelze dojít. Argument samozřejmě platí pro libovolný cíl: stejně tak nedokážeme přejít ulici, udělat jediný krok či zamávat rukou. Jakýkoli pohyb je vyloučen.

Diogenes, zastánce kynismu, prý Zenonův paradox odmítl tak, že se postavil a udělal několik kroků. Což je docela dobrý argument, který ukazuje, že pohyb je skutečně možný. Se Zenonovým tvrzením tedy něco není v pořádku. V čem však spočívá chyba?

Rozdělme si cestu do cukrárny číselně. Nejdříve ujdeme polovinu cesty. Pak urazíme polovinu zbývající vzdálenosti, která odpovídá 1/4 celkové vzdálenosti, a máme před sebou ještě 1/4. Polovina z toho, co zbývá, tedy odpovídá 1/8, pak 1/16, pak 1/32. Postup k cíli můžeme zaznamenat jako tento součet:

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \ldots$$

Když sečteme deset prvků této řady, dostaneme asi 0,999. Po sečtení dvaceti prvních prvků se spíše přibližujeme číslu 0,999999. Jinými slovy se ke zmrzlině dostáváme opravdu hodně blízko. Ale bez ohledu na to, kolik členů přičteme, nikdy se nedostaneme až k hodnotě 1.

Zenonův paradox hodně připomíná jinou hádanku: je číslo 0,99999…… periodicky rovné 1?

Už jsem viděl, jak si někteří lidé kvůli tomu málem nafackovali.* Bouřlivě se o tom diskutuje na nejrůznějších webových fórech: od fanoušků hry World of Warcraft po příznivce Ayn Randové. Slyšíme-li o Zenonově paradoxu, přirozeně se přikláníme k názoru, že „svou zmrzlinu člověk samozřejmě dostane“. V tomto případě nás však intuice vede opačným směrem. Většina lidí, když je donutíte se rozhodnout, prohlásí, že 0,9999… se nerovná 1. To číslo nepochybně *nevypadá* jako 1. Zdá se nám menší. Ale o moc menší není! Podobně jako Zenonův mlsný milovník zmrzliny se ke svému cíli stále přibližuje, ale vypadá to, že až k němu nikdy nedorazí.

A každý učitel matematiky včetně mě jim řekne: „Ne, je to opravdu 1.“

Jak někoho přesvědčit, že mám pravdu? Jeden dobrý trik využívá následující argumentaci. Každý ví, že

---

* Musím přiznat, že se jednalo o teenagery na letním matematickém táboře.

$0{,}33333\ldots\ldots = 1/3.$

Vynásobme obě strany číslem 3 a získáme

$0{,}99999\ldots\ldots = 3/3 = 1.$

Pokud tento důkaz nestačí, zkusme vynásobit 0,99999… číslem 10. Při tom stačí přesunout desetinnou čárku o jedno místo doprava.

$10 \times (0{,}99999\ldots) = 9{,}99999\ldots$

Nyní od obou stran odečtěme ten protivný řetězec desetinných čísel:

$10 \times (0{,}99999\ldots) - 1 \times (0{,}99999\ldots)$
$= 9{,}99999\ldots - 0{,}99999\ldots$

Na levé straně rovnice zůstane jen $9 \times (0{,}99999\ldots)$, protože když nějakou hodnotu odečteme od jejího desetinásobku, dostaneme devítinásobek této hodnoty. A na pravé straně rovnice se nám podařilo otravné periodické číslice zbavit úplně a zůstala nám jednoduchá devítka. Zbývá nám tedy

$9 \times (0{,}99999\ldots) = 9.$

Jestliže 9 krát cosi je 9, to cosi se prostě musí rovnat 1, že?

Většině lidí tyto argumenty stačí k tomu, aby se nechala přesvědčit. Ale buďme upřímní: něco zde chybí. Uvedené výpočty ve skutečnosti neřeší hlubokou nejistotu, jakou vzbuzuje tvrzení, že 0,99999… = 1. Představují spíše jakousi formu algebraického nátlaku. „Víš přece, že 1/3 je totéž jako 0,3 periodicky, že? *Že ano*?“

Ale může to být ještě horší: možná jste podlehli mému argumentu založenému na násobení deseti. Ale co řeknete na tohle? Kolik je

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots\,?$

Symbol „…“ zde znamená „pokračuj ve sčítání neomezeně dlouho a pokaždé přičítej dvojnásobnou hodnotu než v předchozím kroku“. Součet takové řady musí být nepochybně nekonečný! Avšak argument hodně podobný tomu, který jsme využili u čísla 0,9999…, však zdánlivě svědčí o něčem jiném. Vynásobme výše uvedenou řadu číslem 2 a dostaneme

$$2 \times (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots) = 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$$

což hodně připomíná původní posloupnost. Ve skutečnosti se jedná jen o původní řadu $(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots)$ s vynechanou 1 na začátku, což znamená, že $2 \times (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots)$ je o 1 menší než $(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots)$. Jinými slovy

$$2 \times (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots) - 1 \times (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots)$$
$$= -1.$$

Levá strana rovnice však po zjednodušení odpovídá řadě, od které jsme vyšli, a zbývá nám

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots = -1.$$

Opravdu *tomu* chcete věřit?* Že když budeme donekonečna přičítat stále větší hodnoty, najednou se dostaneme do záporných čísel?

Nyní něco ještě bláznivějšího: jakou hodnotu má nekonečný součet

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Nejdříve si můžeme všimnout, že součet je

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots$$

a tvrdit, že součet více nul – i kdyby jich bylo nekonečně mnoho – se musí rovnat 0. Na druhou stranu $1 - 1 + 1$ je totéž jako $1 - (1 - 1)$, protože opakem záporného čísla je číslo kladné. Když tento fakt uplatníme znovu a znovu, můžeme řadu přepsat jako

* Abyste nezůstávali v nejistotě: v určitém kontextu, tzv. 2-adických čísel, je tento šíleně vyhlížející argument naprosto správný. Fanoušci teorie čísel najdou další příslušné informace v poznámkách na konci knihy.

$$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) \ldots = 1 - 0 - 0 - 0 \ldots$$

což nás podle všeho nutí stejným způsobem uznat, že součet se rovná 1! Takže který výsledek je správný, 0, nebo 1? Nebo se součet polovinu času rovná 0 a druhou polovinu 1? Vypadá to, že záleží na tom, kde skončíme – ale nekonečné součty přece nikdy nekončí!

Zatím se nerozhodujte, protože bude ještě hůř. Předpokládejme, že hodnotou naší záhadné řady je číslo T:

$$T = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Když obě strany vynásobíme číslem −1, získáme

$$-T = -1 + 1 - 1 + 1 \ldots$$

Součet na pravé straně však přesně odpovídá tomu, co dostaneme, když vezmeme původní řadu definující T a odstraníme z ní první člen 1, tj. když odečteme 1. Jinými slovy

$$-T = -1 + 1 - 1 + 1 \ldots = T - 1.$$

Takže $-T = T - 1$ a tato rovnice s proměnnou T platí pouze v případě, že T se rovná 1/2. Může se součet nekonečně mnoha celých čísel náhle magicky změnit ve zlomek? Pokud prohlásíte, že nikoli, máte právo se na elegantní argumenty tohoto typu dívat poněkud podezíravě. Je však potřeba zmínit, že někteří lidé tomu věřili. Patřil k nim italský kněz a matematik Guido Grandi, po kterém se řada $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ obvykle nazývá. Ve svém článku z roku 1703 argumentoval, že součet řady se rovná 1/2. Dokonce spekuloval, že tento zázračný výsledek představuje stvoření vesmíru z ničeho. (Nebojte se, tento poslední krok nebudeme rozvíjet.) S podivnými Grandiho výpočty souhlasili i jiní významní matematici jeho doby, jako například Leibniz a Euler, i když přitom nesdíleli jeho interpretaci.

Řešení hádanky s číslem 0,999… (a Zenonova paradoxu a výpočtu Grandiho řady) však spočívá poněkud hlouběji. Mými algebraickými kousky se nemusíte nechat zastrašit. Můžete například tvrdit, že 0,999… se nerovná 1, ale spíše 1 minus nějaké drobné infinitezimální číslo. A podobně můžete dále prohlašovat, že 0,333… není *přesně* rovno 1/3, ale také se od tohoto zlomku liší o nějakou infinitezimální hodnotu. Abyste toto tvrzení dotáhli do konce, potřebujete sice jistou výdrž, ale dá se to provést. Ve svém kurzu diferenciálního počtu jsem jednou měl studenta jménem Brian, který nebyl spokojen s prezentovanými definicemi. Značnou část teorie tedy vypracoval samostatně a svým infinitezimálním množstvím říkal „Brianova čísla".

Brian ve skutečnosti nebyl první, koho to napadlo. Existuje celý matematický obor, který se na rozbor čísel tohoto typu specializuje. Označuje se jako *nestandardní analýza*. Teorie, kterou v polovině dvacátého století vyvinul Abraham Robinson, nakonec postavila na pevnou půdu i „mizející inkrementy", které Berkeleymu připadaly tak směšné. Za tyto nové možnosti však musíte zaplatit jistou cenu (na druhou stranu by se dalo říci, že na své úsilí získáváte odměnu) ve formě záplavy nových druhů čísel. Některá jsou nekonečně malá a jiná zase nekonečně velká. Mají nejrůznější tvary a vlastnosti.*

Brian měl štěstí – na Princetonské univerzitě působí můj kolega Edward Nelson, který je v nestandardní analýze odborníkem. Domluvil jsem jim schůzku, aby se Brian mohl o těchto číslech dozvědět více. Ed mi později prozradil, že se schůzka příliš nevyvedla. Hned poté, co Ed Brianovi vysvětlil, že jeho infinitezimálním množstvím se nebude říkat *Brianova čísla*, Brian o ně kompletně ztratil zájem.

(Z toho plyne ponaučení: lidé, kteří se do matematiky pouštějí proto, že se chtějí proslavit, u ní dlouho nevydrží.)

Příliš jsme se však nepřiblížili k vyřešení svého sporu. Kolik je 0,999…, ale *doopravdy*? Je to 1? Nebo se jedná o číslo, které je jen infinitezimálně menší než 1, číslo nějakého podivného typu, jaké před sto lety matematici vůbec neznali?

Správná odpověď spočívá v tom, že si tuto otázku přestaneme klást. Kolik doopravdy je 0,999…? Podle všeho označuje součet jakési řady:

$$0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + 0{,}0009 + \dots$$

---

* Mimořádně půvabný a zároveň podivný příklad představují *surreálná čísla*, která vyvinul John Conway, jak ostatně naznačuje už jejich název. Jedná se o podivné křížence čísel a strategických her a jejich vlastnosti zatím ještě nebyly plně prozkoumány. O těchto exotických číslech se s výhodou můžete poučit v knize *Winning Ways* (Cesty k výhře), kterou napsali Berlekamp, Conway a Guy. Kromě toho se tam také mnoho dozvíte o bohaté matematice teorie her.

Co to však znamená? Skutečným problémem je ten protivný symbol výpustky. Není žádného sporu o tom, co znamená sečíst dvě, tři nebo sto čísel. Jedná se jen o matematickou formulaci fyzického procesu, kterému velmi dobře rozumíme: vezmeme sto hromádek předmětů, shrneme je dohromady a zjistíme, kolik toho máme. Ale u nekonečně mnoha hromádek? To je úplně jiná historie. V reálném světě nikdy nemůžeme mít nekonečně mnoho hromádek. Jakou číselnou hodnotu má nekonečný součet? Žádnou mít nemusí – *dokud mu ji nepřiřadíme*. To byla velká inovace, s níž přišel Augustin-Louis Cauchy, který ve 20. letech 19. století zavedl do diferenciálního počtu pojem *limity*.*

Nejlépe to objasnil britský teoretik čísel G. H. Hardy ve své knize *Divergent Series* (Divergentní řady) z roku 1949:

> Moderní matematik se nedomnívá, že skupina matematických symbolů musí mít nějaký „význam“, dokud jí ho z definice nepřiřadíme. Tento poznatek nebyl ani pro největší matematiky osmnáctého století ničím triviálním. Neměli ve zvyku něco definovat: nebylo pro ně přirozené mnoha slovy říkat „symbolem X máme *na mysli* Y“… Obecně platí, že matematici před Cauchym se neptali „Jak můžeme *definovat* 1 − 1 + 1 − 1 + …“, ale „Kolik je 1 − 1 + 1 − 1 + …?“ a tento myšlenkový postoj je přiváděl do mnoha zbytečných zmatků a sporů, které často byly pouze teoretické.

Tato slova nesvědčí jen o nějakém uvolněném matematickém relativismu. To, že můžeme řetězci matematických symbolů přiřadit libovolný význam, jaký chceme, ještě neznamená, že bychom to měli udělat. V matematice, stejně jako v praktickém životě, máme k dispozici dobré i špatné volby. V matematickém kontextu jsou dobré takové možnosti, které řeší zbytečné problémy, aniž by vytvářely nové.

Čím více členů přičtete, tím více se součet 0,9 + 0,09 + 0,009 + … přibližuje k 1. A nikdy se od tohoto čísla nevzdálí. Nezáleží na tom, jak úzké pásmo kolem čísla 1 vymezíme, ale po určitém konečném počtu kroků do něj součet vstoupí a nikdy je neopustí. Cauchy prohlásil, že za těchto okolností bychom hodnotu nekonečného součtu měli jednoduše *definovat* jako rovnou 1. A potom vykonal hodně těžké práce, aby

---

* Podobně jako všechny matematické přelomy také Cauchyho teorie limit měla své předchůdce – například Cauchyho definice byla do značné míry v duchu d’Alembertových mezí chybových členů binomických řad. Není však sporu o tom, že Cauchy znamenal mezník – jeho prací začíná moderní analýza.

dokázal, že když jeho definici přijmeme, nebudeme někde jinde čelit neřešitelným sporům. Když tuto práci dokončil, vybudoval tím rámec, ve kterém byl Newtonův diferenciální počet naprosto rigorózní. Když říkáme, že křivka lokálně vypadá jako přímka pod jistým úhlem, máme nyní na mysli víceméně toto: jak se stále více přibližujeme, křivka stále přesněji připomíná danou přímku. V Cauchyho formulaci není nutné zmiňovat nekonečně malá čísla. Neobsahuje ani cokoli jiného, co by mohlo vadit případným skeptikům.

Samozřejmě to má svou cenu. Důvod, proč je problém s číslem 0,999… náročný, spočívá v tom, že způsobuje konflikt našich intuitivních představ. Chtěli bychom, aby se součet nekonečných řad choval způsobně v souladu s aritmetickými manipulacemi, jako byly ty, které jsme prováděli na předchozích stranách. To by podle všeho vyžadovalo, aby byl součet této řady roven 1. Na druhou stranu bychom byli rádi, kdyby každé číslo reprezentoval jedinečný řetězec desetinných číslic. To je ovšem v rozporu s tvrzením, že stejné číslo lze zapsat buď jako 1, nebo jako 0,999…, a na zvolené verzi nezáleží. Obě tato přání se nemohou splnit současně – jednoho se musíme vzdát. Cauchyho přístup, který se v uplynulých dvou stoletích dostatečně osvědčil, vyžaduje, abychom se zřekli jedinečnosti desetinného rozvoje. Nevadí nám, že v přirozených jazycích se často používají dvě odlišné posloupnosti písmen (tj. dvě slova), která přitom synonymně označují stejný objekt. Obdobně není nic špatného na tom, když dva různé řetězce číslic znamenají stejné číslo.

Co se týče Grandiho řady 1 − 1 + 1 − 1 + …, patří mezi řady, které leží mimo rámec Cauchyho teorie. Jedná se o jednu z *divergentních řad*, kterým Hardy věnoval svou knihu. Norský matematik Niels Henrik Abel, který patřil mezi první zastánce Cauchyho přístupu, roku 1828 napsal: „Divergentní řady jsou ďáblovým vynálezem a je ostudné zakládat na nich jakékoli demonstrace.“* Hardyho pohled, který sdílí i dnešní matematici, je poněkud shovívavější. Některým divergentním řadám bychom měli přiřadit hodnotu a jiným nikoli. To, do které z těchto skupin bude konkrétní řada patřit, záleží na kontextu, v jakém se objevuje. Moderní matematici by řekli, že pokud máme Grandiho řadě přiřadit nějakou hodnotu, měla by to být 1/2. Jak se totiž ukazuje, všechny zajímavé teorie nekonečných součtů buď poskytují hodnotu 1/2, nebo – jako v Cauchyho teorii – se nijak vyčíslit nedají.**

* Vzhledem k původním Grandiho teologickým vývodům ohledně jeho divergentních řad je to ironické.

** Můžeme opakovat výrok, kterým se proslavila Lindsay Lohan: „Limit neexistuje!“

Přesný zápis Cauchyho definic je poněkud pracnější. Platilo to hlavně pro samotného Cauchyho, který své ideje ještě nestihl zformulovat v jejich čistém moderním tvaru.* (V matematice málokdy získáte nejjasnější představu o určité myšlence u osoby, která s ní poprvé přišla.) Cauchy byl zásadový konzervativec a roajalista, ale jeho matematika byla každým coulem revoluční a akademické autority z ní měly strach. Jakmile pochopil, jak počítat bez nebezpečných infinitezimálních čísel, nikoho se neptal a samostatně přepsal sylabus své přednášky na École Polytechnique, aby odrážela jeho nové ideje. Znepřátelil si tím všechny okolo: mátl studenty, kteří se zapsali na kurz diferenciálního počtu pro začátečníky, nikoli na seminář týkající se nejnovější čisté matematiky, své kolegy, podle jejichž názoru studenti techniky na École nepotřebovali Cauchyho přílišný formalismus, a úředníky fakulty, protože kompletně ignoroval jejich požadavky, aby dodržoval oficiální osnovu kurzu. Univerzita stanovila nový učební plán, který zdůrazňoval tradiční přístup k diferenciálnímu počtu s infinitezimálními hodnotami, a do Cauchyho třídy posadila kontrolory, kteří měli hlídat, zda se tímto plánem řídí. Cauchy však neustoupil. Potřeby budoucích techniků jej vůbec nezajímaly. Šlo mu o matematickou pravdu.

Z pedagogického hlediska lze Cauchyho postoj hájit jen stěží. Přesto však k němu cítím své sympatie. K největším radostem matematika patří nesdělitelný pocit, že jste něčemu porozuměli správným způsobem a až k samému jádru věcí. Tento pocit jsem v žádné jiné duševní oblasti nezažil. A když víte, že něco je správné, je těžké – a pro některé tvrdohlavé osoby přímo nemožné – vysvětlovat to nesprávným způsobem.

* Pokud jste se někdy zúčastnili matematického kurzu, kde se používala řecká písmena epsilon a delta, setkali jste se s následníky Cauchyho formálních definic.

TŘI

VŠICHNI JSME OBÉZNÍ

Komik Eugene Mirman předvádí následující výstup týkající se statistiky. Podle svých slov rád lidem říká: „Dočetl jsem se, že 100 % Američanů je asijského původu."

„Ale Eugene," protestuje jeho udivený partner, „ty přece *nejsi* žádný Asiat."

A komik poté s odzbrojující sebejistotou pronáší pointu: „Psali to přece v novinách!"

Na Mirmanův vtip jsem si vzpomněl, když jsem v časopise *Obesity* narazil na článek, jehož název kladl znepokojivou otázku: „Budou všichni Američané trpět nadváhou nebo obezitou?" A jako by nestačila rétorická otázka, článek nabídl i odpověď: „Ano – do roku 2048."

V roce 2048 mi bude sedmdesát sedm let a doufám, že obézní nebudu. Ale tady se dočítám, že budu!

Jak se dalo očekávat, článek v časopise *Obesity* vzbudil značný rozruch. Zpravodajství ABC News varovalo před „apokalypsou obezity". V novinách *Long Beach Press-Telegram* vyšel článek s prostým nadpisem „We're Getting Fatter" (Tloustneme). Kvůli výsledkům studie se u Američanů opět projevil sklon k úzkostným úvahám na téma stavu společenské morálky. Ještě před mým narozením se u chlapců rozšířila móda dlouhých vlasů, která měla způsobit, že nás převálcují komunisté. V době mého dětství jsme si příliš často hráli na hracích automatech, takže bylo jasné, že nás předstihnou pracovití Japonci. Nyní příliš často jíme v restauracích rychlého občerstvení, a proto všichni umřeme vyčerpaní a nepohybliví mezi hromadami prázdných krabic od pizzy rozvalení na svých gaučích, ze kterých se už delší dobu nedokážeme vůbec zvednout. Článek tyto obavy podporoval, protože přinášel vědecky podložená fakta.

Mám pro vás dobrou zprávu. Všichni do roku 2048 nadváhu mít nebudeme. Proč? Proto, že každá křivka není přímkou.

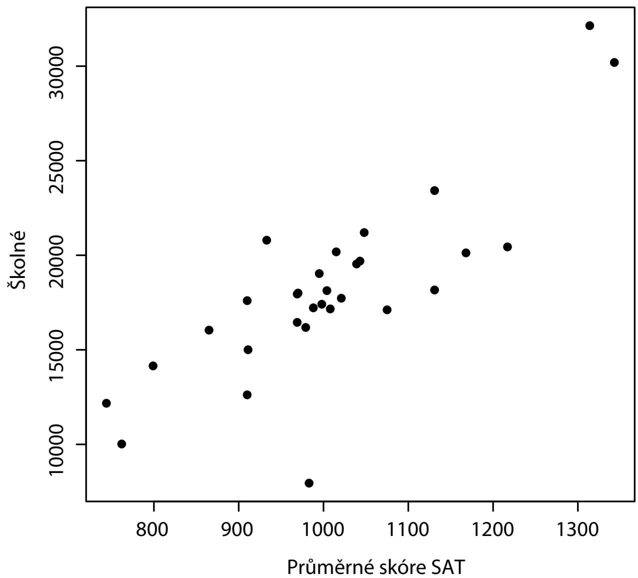
Jak však víme od Newtona, každá křivka je přímce velmi blízká. Na této myšlence je založena *lineární regrese*, což je statistická metoda, která ve společenských vědách plní podobnou funkci jako šroubovák při domácích opravách. Tento nástroj použijete prakticky s jistotou, ať už máte před sebou libovolný úkol. Pokaždé, kdy se v novinách dočtete, že lidé s více bratranci a sestřenicemi jsou šťastnější, země s větším počtem restaurací Burger Kings se vyznačují uvolněnější morálkou, snížení příjmu niacinu na polovinu zdvojnásobuje riziko plísňového onemocnění nohou nebo že každých dodatečných 10 000 USD ročního příjmu o 3 % zvyšuje pravděpodobnost, že budete volit republikány,* setkali jste se s výsledky lineární regrese.

Ukažme si, jak to funguje. Máte dvě veličiny, mezi nimiž chcete najít souvislost. Řekněme, že porovnáváte výši univerzitního školného a průměrné skóre nastupujících studentů v testech SAT. Můžete se domnívat, že školy s vyššími nároky na skóre SAT budou pravděpodobně dražší. Při pohledu na data však zjistíte, že toto pravidlo neplatí univerzálně. Elon University na okraji města Burlington v Severní Karolíně vykazuje průměrné kombinované skóre v matematických a verbálních testech 1217 a účtuje školné ve výši 20 441 USD ročně. Blízká Guilford College v Greensboro je se školným 23 420 USD poněkud dražší, ale studenti tamních prvních ročníků v testech SAT dosáhli v průměru pouhých 1131 bodů.

Když se však podíváme na širší skupinu škol – řekněme na třicet jednu soukromou univerzitu, které roku 2007 oznámily údaje o výši školného a skóre studentů organizaci North Carolina Career Resource Network, zpozorujeme jasný trend.

Každý bod v grafu představuje jednu z univerzit. Co znamenají ty dvě tečky blízko pravého horního rohu grafu, které odpovídají závratně vysokým skóre SAT a odpovídajícímu školnému? Jedná se o univerzity Wake Forest a Davidson. Osamocený bod poblíž spodního okraje je Cabarrus College of Health Sciences, jediná soukromá škola ze seznamu, která účtuje nižší roční školné než deset tisíc dolarů.

* Další podrobnosti o těchto studiích najdete v odborném periodiku *Sborník příspěvků, které jsem si vycucal z prstu, abych mohl podpořit svůj výklad.*

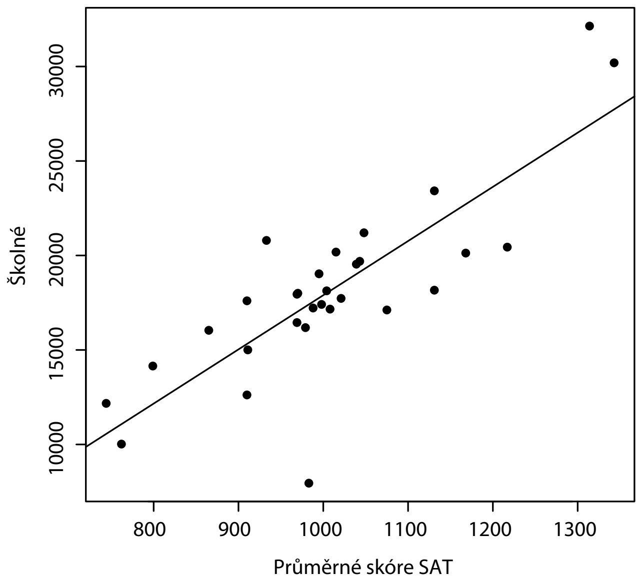


Tento obrázek jasně dokládá, že školy s lepším skóre mají výrazně vyšší školné. Ale o *kolik* jsou dražší? Zde se uplatní lineární regrese. Body na obrázku nepochybně neleží na přímce. Vidíme však, že od ní nejsou daleko. Pravděpodobně bychom dokázali od ruky nakreslit přímou čáru, která by procházela zhruba středem tohoto oblaku bodů. Díky lineární regresi však průběh této přímky nemusíme odhadovat a můžeme najít přímku, která má k průchodu všemi body nejblíže.* V případě vysokých škol v Severní Karolíně vypadá tak jako v následujícím grafu.

Směrnice linie na obrázku se přibližně rovná 28. To znamená, že pokud by školné skutečně plně záviselo na skóre SAT podle čáry, kterou jsme vynesli do grafu, každý dodatečný bod v testu SAT by odpovídal zvýšení školného o 28 dolarů. Jestliže se

* „Nejblíže“ se v tomto kontextu určuje následovně: nejdříve nahradíme skutečné školné v každé škole odhadem, který vyplývá z přímky. Potom pro každou univerzitu spočítáme rozdíl mezi odhadovaným a skutečným školným a jednotlivé hodnoty umocníme na druhou. Když tyto mocniny sečteme, získáme určité měřítko, podle nějž přímka míjí body grafu. Volíme takovou přímku, u které je toto měřítko co nejmenší. Toto sčítání čtverců poněkud zavání přístupem pythagorejců. V geometrických základech lineární regrese skutečně neleží nic jiného než Pythagorova věta, která je pouze přenesena do prostředí s mnohem více rozměry. Algebraické vysvětlení by si však vyžádalo poněkud více místa, než jaké zde máme k dispozici. Další informace k tomuto tématu však uvedeme v rozboru korelace a trigonometrie v kapitole 15.

škole podaří zvýšit průměrné skóre SAT studentů prvního ročníku o 50 bodů, může zvednout školné o 1400 dolarů ročně. (Případně se na to můžeme podívat z hlediska rodičů: když se jejich potomek zlepší o 100 bodů, bude je to stát 2800 dolarů ročně navíc. Ten přípravný kurz se jim poněkud prodraží.)



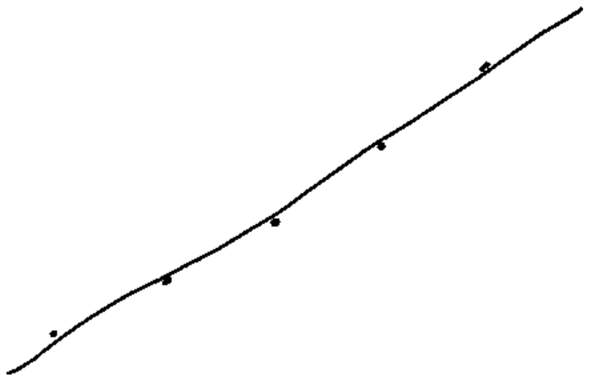
Lineární regrese je úžasný nástroj. Je všestranná, lze ji nasadit v různém měřítku a dá se vypočítat velmi snadno – stačí kliknout na tlačítko v tabulkovém procesoru. Můžete ji aplikovat na datové množiny, které zahrnují dvě proměnné, jako tomu je v uvedeném příkladu, ale stejně dobře funguje i pro tři proměnné nebo proměnných tisíc. Kdykoli chcete pochopit, na které proměnné závisejí jiné proměnné a ve kterém směru se tato závislost projevuje, sáhnete nejdříve po lineární regresi. A tato metoda zpracuje úplně všechny sady dat.

To je ovšem zároveň její silná i slabá stránka. Můžete provést lineární regresi, aniž byste se zamysleli nad tím, zda modelované jevy opravdu mají přibližně lineární průběh. *Jenže byste to udělat neměli.* Zmínil jsem, že lineární regrese je něco jako šroubovák, a nelhal jsem. V jiném ohledu bychom ji však mohli přirovnat spíše k cirkulárce. Pokud si při práci s ní nedáváte velký pozor, může to skončit katastrofou.

Vezměme například projektil, který jsme vystřelili v předchozí kapitole. Třeba jsme to nebyli my, ale někdo jiný. Je možné, že střela má vlastně trefit nás. Máme tedy značný zájem na tom, abychom dráhu střely analyzovali co nejpřesněji.

Můžeme například vykreslit svislou pozici projektilu v pěti různých časových bodech a dostaneme přibližně takový graf:

Nyní rychle provedeme lineární regresi a získáme skvělé výsledky. Našli jsme přímku, která téměř přesně prochází vynesenými body:



(V tu chvíli bezmyšlenkovitě začínáme přibližovat ruku k ostří kotoučové pily.)

Naše přímka poskytuje velmi přesný model pohybu střely: po uplynutí každé sekundy střela zvyšuje výšku o nějakou pevnou vzdálenost, řekněme 400 metrů. Za minutu se bude nacházet 24 km nad zemským povrchem. Kdy dopadne na zem? Nikdy! Přímka směřující nahoru prostě stále pokračuje ve svém směru. Tak se přímky chovají.

(Krev, zaskřípání a jekot.)

Ne každá křivka je přímkou. A křivka dráhy letu projektilu *naprosto jednoznačně* není přímkou, ale jedná se o parabolu. Stejně jako u Archimedova kruhu vypadá jako přímka po velkém přiblížení. Proto nám lineární regrese velmi dobře prozradí, kde bude střela pět milisekund poté, co jsme ji naposledy zaměřili. Ale o minutu později?

Na to můžeme zapomenout. Podle našeho modelu by se měl granát nacházet někde v dolní stratosféře, zatímco pravděpodobně se již blíží k našemu domu.

S nejdůraznějším varováním před bezmyšlenkovitou lineární extrapolací nepřišel žádný statistik, ale spisovatel Mark Twain ve své knize *Život na Mississippi* (Life on the Mississippi):

> Před sto sedmdesáti šesti lety byla tedy řeka mezi Cairem a New Orleansem dlouhá tisíc dvě stě patnáct mil. Po zkrácení v roce 1722 měřila jedenáct set osmdesát mil. Po zkrácení u Americké zátoky byla dlouhá tisíc čtyřicet mil. Od té doby pozbyla dalších šedesáti sedmi mil. Dnes tedy měří pouhých devět set sedmdesát tři míle… Za sto sedmdesát šest let zkrátil se dolní tok Mississippi o dvě stě čtyřicet dvě míle. Je to v průměru o něco víc než jedna a jedna třetina míle ročně. Každý rozvážný člověk, pokud není slepý nebo hloupý, musí tedy uznat, že v starší době kamenné, od níž uplyne v listopadu příštího roku právě milion let, byl dolní tok Mississippi dlouhý něco přes milion tři sta tisíc mil a trčel přes Mexický záliv jako rybářský prut. Podle týchž úkazů může pak tento člověk dále usoudit, že za sedm set čtyřicet dva roky bude dolní tok Mississippi dlouhý jen jednu a tři čtvrtě míle. Cairo a New Orleans splynou v jedno město, pěkně spravované jediným starostou a společnou městskou radou. Věda má v sobě cosi fascinujícího. Člověk si může z takového pranepatrného faktu vyvodit takové množství skvělých závěrů!
>
> *(přeložili Josef a Gerta Pospíšilovi)*

Poznámka na okraj: jak při mé zkoušce z diferenciálního počtu dostat částečné bodové hodnocení

V diferenciálním počtu se postupuje velmi podobně jako při lineární regresi: výpočty jsou čistě mechanické, dokáže je provést i kalkulačka a je velmi riskantní používat tyto výpočty bezmyšlenkovitě. U zkoušky z diferenciálního počtu můžete dostat následující úkol: spočítejte hmotnost vody, která zůstane v nádobě, pokud do dna nádoby uděláte otvor, kterým určitou dobu může voda vytékat, a tak dále a tak podobně. Při řešení takových problémů, zejména v časovém stresu, se můžete snadno dopustit aritmetických chyb. Kvůli takovým chybám někdy studenti dostávají směšné výsledky, například zjistí, že zbývající voda v nádobě bude vážit –4 gramy.

Pokud student vypočítá −4 gramy a vedle tohoto výsledku v zoufalství spěšně načmárá „někde jsem se sekl, ale nedokážu tu chybu najít“, dám mu poloviční počet bodů.

Jestliže však na konci stránky napíše „−4 g“ a výsledek zakroužkuje, nedostane ani bod – i když byla celá derivace správná, až na jediné přehozené znaménko někde uprostřed stránky.

Spočítat integrál nebo zpracovat lineární regresi dokáže docela efektivně i počítač. Ovšem pouze lidským rozumem lze pochopit, zda výsledek dává smysl – nebo rozhodnout o tom, zda je příslušná metoda vůbec pro danou úlohu vhodná. Při výuce matematiky se od nás očekává, že budeme vysvětlovat, jak o výpočtech přemýšlet. V matematickém kurzu, který tuto schopnost neučí, se studenti v zásadě trénují k tomu, aby fungovali jako velmi pomalý a chybový Microsoft Excel.

A buďme k sobě upřímní: mnoho přednášek z matematiky tak skutečně vypadá. Závěrem tohoto dlouhého a kontroverzního povídání uveďme, že výuka matematiky u dětí byla po desítky let oblastí, kde matematici sváděli intenzivní boje. Na jedné straně stáli učitelé, kteří kladou důraz na zapamatování, plynulost, tradiční algoritmy a přesné odpovědi. Druhá část učitelů je zase přesvědčena o tom, že výuka matematiky by měla ukazovat smysl, rozvíjet schopnost přemýšlení, vést žáky k vlastnímu objevování pouček a učit je schopnost odhadu. První přístup se někdy označuje jako *tradiční* a druhý jako *reformní*, ačkoli ten podle názvu netradiční objevitelský přístup se v nějaké podobě uplatňuje již desítky let, a navíc je otevřenou otázkou, zda se tato „reforma“ dá považovat za skutečnou reformu. Tato debata je *hodně* vášnivá. Na schůzce několika matematiků je klidně možné diskutovat o politice nebo náboženství, ale jakmile někdo začne hlásat své názory na výuku matematiky, pravděpodobně to skončí tím, že jeho kolega (tradiční či reformní) za sebou vztekle práskne dveřmi.

Já se neřadím ani k jednomu z těchto táborů. Nemohu se shodnout s těmi reformisty, kteří chtějí zrušit učení násobilky nazpaměť. Když chcete v matematice přemýšlet o něčem důležitém, musíte občas vynásobit třeba 6 × 8. Pokud však v každém takovém případě musíte sáhnout po kalkulačce, nikdy nedosáhnete duševní plynulosti, jakou zásadní úvahy vyžadují. Nedokážete složit sonet, když přitom musíte u každého slova hledat, jak se správně píše.

Někteří reformisté zacházejí tak daleko, že tvrdí, že by se z výuky měly odstranit klasické algoritmy (například pro sčítání dvou víceciferných číslic, které napíšeme nad sebe a v případě potřeby přenášíme jedničku do vyššího řádu). Podle jejich názoru totiž tyto algoritmy studentům překážejí v tom, aby mohli vlastnosti matematických objektů objevovat samostatně.*

Mně to připadá jako naprosto hloupý nápad: tyto algoritmy představují užitečné nástroje, o které lidé hodně usilovali. Není proto žádný důvod, abychom museli opět začínat úplně od začátku.

Na druhou stranu některé algoritmy můžeme podle mého názoru v moderním světě bezpečně opustit. Nemusíme studenty učit, jak na papíře, nebo dokonce z hlavy počítat druhou odmocninu (ačkoli z dlouhodobých vlastních zkušeností mohu dosvědčit, že díky druhé uvedené schopnosti se můžete v dostatečně technicky založené společnosti těšit značnému obdivu). Kalkulačky také patří mezi užitečné nástroje, jaké jsme dlouho neměli k dispozici. Když to situace vyžaduje, měli bychom pracovat i s nimi. Nezáleží mi dokonce ani na tom, zda moji studenti dokážou ručně vydělit číslo 430 číslem 12 – i když *trvám* na tom, že by měli mít natolik rozvinutý smysl pro čísla, aby dokázali z hlavy odhadnout, že výsledek je o něco větší než 35.

Přílišný důraz na algoritmy a správné výpočty je nebezpečný tím, že algoritmy a přesné výpočty lze snadno hodnotit. Pokud se smíříme s vizí matematiky, kde se jedná o „správné odpovědi" a nic jiného, a tuto schopnost budeme testovat, riskujeme, že vychováme studenty, kteří budou mít dobré testové výsledky, ale matematiku nebudou vůbec chápat. Pro někoho, koho motivují především a výhradně výsledky testů, to může být příjemná představa, ale mě tedy rozhodně neuspokojuje.

Samozřejmě není o nic lepší (ve skutečnosti výrazně horší), když vychováváme zástupy studentů, kteří mají jakousi mlhavou představu o matematickém smyslu, ale nedokážou rychle a správně počítat příklady. Jestli učitelé matematiky u studentů něco nesnášejí, pak jsou to výroky typu „z principu to chápu, ale problémy nedokážu vyřešit". Student si to sice neuvědomuje, ale jeho výrok lze ve skutečnosti přeložit jako „princip nechápu". Matematické ideje sice mohou znít abstraktně, ale dávají smysl teprve v rámci konkrétních výpočtů. Rázně to vyjádřil William Carlos Williams: *bez věcí nejsou žádné ideje*.

---

* Poněkud to připomíná povídku Orsona Scotta Carda „Unaccompanied Sonata". Jejím hrdinou je hudební génius, kterého pečlivě drží o samotě a nedovolují mu seznámit se s žádnou existující hudbou, aby nic nenarušilo jeho originalitu. Potom se však k němu dostane kdosi, kdo mu pustí Bachovu skladbu. Hudební policie samozřejmě zjistí, co se stalo, a génius má nakonec zakázáno se hudbou zabývat. Později – mám takový dojem – mu useknou ruce a oslepí jej, nebo něco podobného, protože Orson Scott Card má jakousi podivnou zálibu v tělesných trestech. Ponaučení je však samozřejmě takové, že bychom mladým hudebníkům neměli upírat poslech Bacha, protože Bach je skvělý.

Tuto bitvu lze nejlépe pozorovat v planimetrii. Jedná se o poslední útočiště výuky důkazů, což je základní matematická metoda. Mnoho profesionálních matematiků tuto oblast považuje za poslední doménu „skutečné matematiky". Když však učíme geometrii, s jistotou nevíme, co jaké míry skutečně dokážeme předat její krásu, sílu a překvapivost důkazů. Snadno se může stát, že se matematická přednáška změní na opakované cvičení, které je stejně suché jako seznam třiceti určitých integrálů. Situace je natolik vážná, že držitel Fieldsovy medaile David Mumford navrhl, že bychom měli s výukou planimetrie úplně přestat a nahradit ji kurzem základů programování. Počítačový program má nakonec s geometrickým důkazem hodně společného: v obou případech musí student sestavit několik velmi jednoduchých součástí, které vybírá z omezené sady možností. Tyto součásti pak seřadí za sebe, aby jejich sekvence plnila nějakou smysluplnou funkci.

Já bych tak radikální nebyl. Vlastně je mi jakákoli radikálnost cizí. Zastánce krajních postojů asi zklamu, ale myslím, že bychom měli učit matematiku, která oceňuje přesné odpovědi, ale také inteligentní odhady, která vyžaduje schopnost plynule aplikovat existující algoritmy, ale využívá také selský rozum a hledání řešení metodou pokusu a omylu – jinými slovy matematiku, která kombinuje rigiditu se smyslem pro zábavu. Pokud se nám to nedaří, ve skutečnosti žádnou matematiku vůbec neučíme.

Úkol není snadný, ale nejlepší učitelé matematiky jej dokážou zvládnout, i když teoretici výuky mezitím vedou své akademické spory.

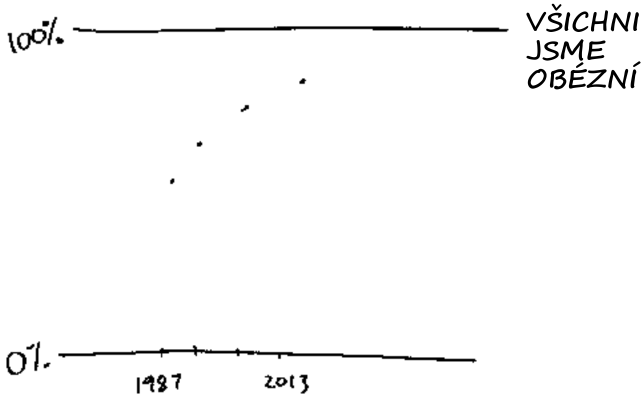
Zpět k apokalypse obezity

Jaké procento Američanů tedy bude roku 2048 obézní? Nyní si už dokážete tipnout, jak Youfa Wang se spoluautory studie v časopise *Obesity* svůj výhled získali. Studie NHANES (National Health and Nutrition Examination Study – celostátní studie zkoumající zdraví a výživu) sledovala údaje o velkém a reprezentativním vzorku Američanů a zaznamenávala vše od nedoslýchavosti až po sexuálně přenosné choroby. Konkrétně poskytuje velmi dobrá data ohledně poměru Američanů, kteří mají nadváhu, což pro naše účely definujeme jako index BMI s hodnotou 25 nebo více.* Není sporu o tom, že obezita je v posledních desetiletích stále častější. Začátkem 70. let měla tak vysoký index BMI pouze necelá polovina Američanů. Do začátku

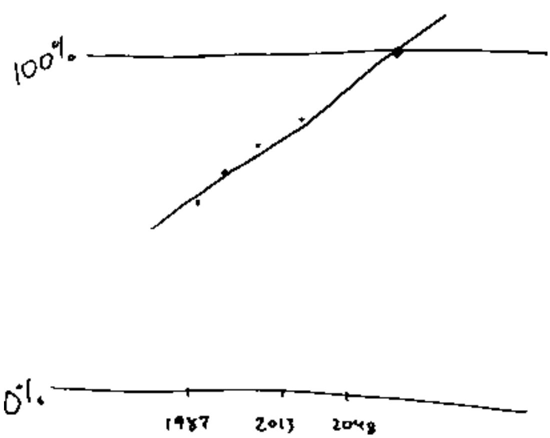
* V odborné literatuře se termínem „nadváha" označuje „index BMI alespoň 25, ale menší než 30" a termín „obezita" znamená „index BMI 30 nebo větší". Zde však obě skupiny budeme označovat jako lidi „s nadváhou", abychom nemuseli neustále opakovat spojení „s nadváhou nebo obézní".

90. let poměr vzrostl téměř k 60 % a v roce 2008 již měly nadváhu téměř tři čtvrtiny populace USA.

Četnost obezity můžeme vykreslit na časové ose stejným způsobem, jako když jsme sledovali vzlet projektilu.



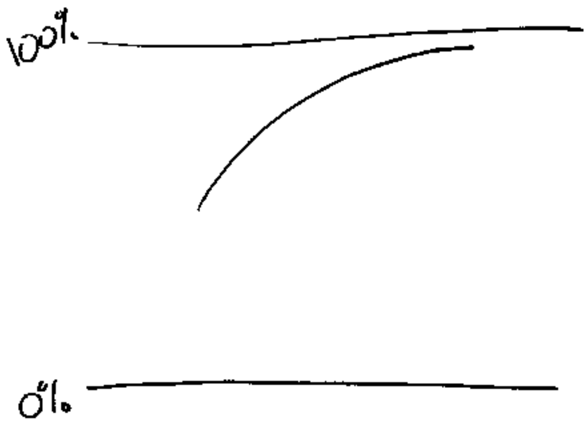
A můžeme spočítat lineární regresi, která bude vypadat asi takto:



V roce 2048 přímka dosáhne úrovně 100 %. A proto autoři studie píší, že pokud budou současné trendy pokračovat, budou mít v roce 2048 všichni Američané nadváhu.

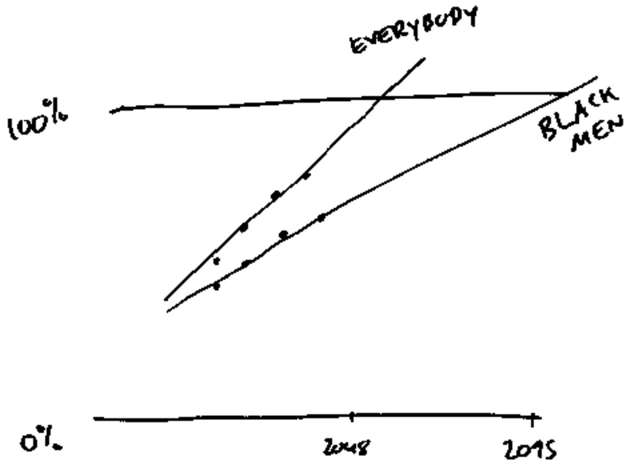
Jenže aktuální trendy pokračovat nebudou. Ani nemohou! Pokud by opravdu pokračovaly, pak by v roce 2060 mělo nadváhu šokujících 109 % Američanů.

Ve skutečnosti to bude vypadat tak, že se poměr bude k hranici 100 % přibližovat stále pomaleji – asi takto:



Není to nějaká přírodní zákonitost typu gravitace, která ohýbá dráhu střely do tvaru paraboly, ale v medicíně se s takovými nedokonalými křivkami musíme spokojit. Jak se podíl lidí s nadváhou zvětšuje, zbývá stále méně těch vyzáblých hubeňourů, které by bylo možné vykrmit, a poměr se ke 100 % přibližuje jen pozvolna. Ve skutečnosti se křivka pravděpodobně v nějakém bodě před dosažením úrovně 100 % úplně vyrovná. Někteří z nás asi zůstanou hubení celý život. A skutečně o pouhé čtyři roky později studie NHANES ukázala, že neustálé zvyšování podílu lidí s nadváhou se již začalo zpomalovat.

Článek v časopise *Obesity* však skrývá ještě horší přečin proti matematice a zdravému rozumu. Lineární regresi lze provést velmi snadno – a když ji aplikujete jednou, je hračkou udělat to podruhé. Wang s kolegy tedy data rozdělili podle etnické skupiny a pohlaví. Muži černé pleti měli například menší pravděpodobnost nadváhy než průměrní Američané. Ještě důležitější zjištění však spočívalo v tom, že v jejich skupině podíl osob s nadváhou vzrůstá jen poloviční rychlostí. Jestliže změnu poměru černých mužů s nadváhou vykreslíme do stejného grafu jako změnu stejného poměru u všech Američanů a obě datové množiny proložíme přímkami lineární regrese, dostaneme obrázek, který vypadá následovně.



Bravo, černoši! Všichni budete mít nadváhu teprve roku 2095. V roce 2048 se bude tento problém týkat jen 80 % z vás.

Už vidíte, kde je chyba? Pokud očekáváme, že roku 2048 budou mít nadváhu *všichni* Američané, kde je ta pětina budoucích černých mužů, kteří v tom roce ještě budou mít zdravou hmotnost? V emigraci?

Tento základní rozpor se v článku nijak neřeší. Je to epidemiologický ekvivalent tvrzení mých studentů, že v nádobě zůstanou –4 gramy vody. Ani jeden bod.