PRŮVODCE STUDIEM EKONOMIE

pro studenty bakalářských i navazujících magisterských studijních programů

Vít Pošta

Markéta Šumpíková

Průvodce studiem ekonomie

pro studenty bakalářských i navazujících magisterských studijních programů

Vít Pošta

Markéta Šumpíková

Obsah

Úvod

Motivací pro napsání této publikace bylo usnadnit studentům studium mikroekonomie a makroekonomie jak na bakalářském, tak navazujícím magisterském stupni studia.

Jednotlivé problematické oblasti, které v některých případech souvisí spíše s matematikou či statistikou, byly nakonec seskupeny do čtyř kapitol, které postupně vysvětlují technické či ekonomické souvislosti, které jsou předmětem studia ekonomie na převážné většině ekonomických oborů v ČR. Jednotlivé rozdělení témat, způsob jejich prezentace a technická náročnost prezentace se mezi jednotlivými vysokými školami samozřejmě liší. Následující text se soustředí na společný základ mikroekonomických a makroekonomických otázek. Tam, kde by mohl vniknout problém v interpretaci z toho důvodu, že se způsob zachycení v této publikaci odlišuje od pojetí v základní literatuře k danému předmětu, na různé způsoby zachycení upozorňujeme, či je přímo prezentujeme.

První kapitola se věnuje analýze vlastností funkce. Především se soustředíme na správné pochopení a různé způsoby zachycení přírůstků funkce. To je velmi důležité pro grafickou analýzu v mikroekonomické teorii, ale současně je to klíčové i pro obyčejnou analýzu empirických dat. V první kapitole rovněž připomínáme hlavní momenty související s hledáním extrémů funkce. Všechny problémy jsou prezentovány především formou konkrétních příkladů. Materiál tak poskytuje automaticky prostor i pro procvičení diskutovaných souvislostí.

Druhá kapitola je věnována mikroekonomii. Podstatou mikroekonomie je analýza dílčích trhů, která důsledně vychází z toho, jak přesně se tržní subjekty rozhodují. Rozhodnutí tržních subjektů vychází z podmínek optimální volby v té konkrétní situaci. Z naší praxe plyne, že právě interpretace podmínek optimální volby patří ke stěžejním problémům při studiu ekonomie. V publikaci představujeme všechny rozhodovací problémy, které jsou standardně nejpozději na navazujícím magisterském stupni studia součástí výkladu mikroekonomie. Při vysvětlení podmínek optimální volby začínáme vždy neformálním vysvětlením jejího principu a standardně uvádíme jednoduchý příklad. V následujícím kroku pak danou podmínku formulujeme pomocí grafické analýzy a ve třetím kroku algebraicky. Pokud tedy například v daném předmětu na bakalářském stupni studia není vyžadována algebraická interpretace, je možné tyto části přeskočit. Podstata podmínek je vysvětlena již v neformální první části.

Třetí kapitola představuje význam a práci s vybranými základními popisnými statistikami, které používáme při úplně obyčejné analýze dat. Mimo to, že se jedná samo o sobě o velmi praktické informace, protože běžná ekonomická praxe je téměř vždy spojena s nějakou formou práce s daty, tak nám tato část umožňuje do pozdějšího výkladu makroekonomických otázek zapojit empirická data za českou ekonomiku. Poslední část třetí kapitoly právě představuje přechod mezi procvičením vybraných popisných statistik a samotným výkladem makroekonomie.

Poslední kapitola prochází ty makroekonomické otázky, které opět představují obvykle hlavní problém. První část kapitoly se vrací k mikroekonomickým podmínkám optima. Ukazujeme v ní, jak je možné je využít pro analýzu makroekonomických otázek. Zvláštní pozornost proto věnujeme analýze měnového kurzu, což je typickým problematickým místem studia makroekonomie. Následně procházíme tři nejpoužívanější makroekonomické modely na příslušných stupních studia a ukazujeme, jak lze s jejich pomocí strukturovat analýzu reálných ekonomických jevů.

1 Funkce

V první kapitole si připomeneme některé základní vlastnosti funkcí, které ve výkladu ekonomické teorie běžně používáme. Budeme zcela minimálně používat obecný výklad, většina úvah bude demonstrována na konkrétních příkladech.

V první části kapitoly se podíváme na to, jakým způsobem můžeme vyjádřit směrnici funkce, což je pojem zcela zásadní, protože směrnice funkce, která vyjadřuje její přírůstky, je z pohledu ekonomických pojmů její mezní veličinou. Jak uvidíme v druhé kapitole, kde budeme rozebírat podmínky optimální volby v různých rozhodovacích situacích, jsou mezní veličiny pro pochopení ekonomické teorie absolutně zásadní. Po výkladu směrnice funkce se podíváme podrobněji na průběh funkce, její extrémy a linearizaci.

Druhá část kapitoly uvádí příklady některých konkrétních ekonomických funkcí, na kterých jsou některé závěry z první části kapitoly ukázány.

1.1 Často používané funkce a jejich vlastnosti

Jak jsme právě zmínili, klíčovou vlastností funkce, která nás z pohledu ekonomické analýzy zajímá je její směrnice. Směrnice funkce ukazuje, jak se mění hodnota závisle proměnné při změně hodnoty nezávislé proměnné. Rovněž můžeme říct, že směrnice zachycuje, jak se mění hodnota oboru hodnot funkce, pokud dojde ke změně hodnoty v definičním oboru funkce.

První informaci, kterou směrnice poskytuje, je tedy ta, zda funkční hodnoty při změně nezávisle proměnné rostou, nebo klesají. Jinými slovy, zda je funkce rostoucí, nebo klesající. Další pohled na chování samotné směrnice poskytuje informaci o tom, jak se mění přírůstky funkce se změnami nezávisle proměnné. Přírůstky funkce mohou být konstantní, pak se jedná o lineární funkci, nebo se mohou samy o sobě měnit, pak se jedná o funkci nelineární. Nelineární funkce mohou vykazovat rostoucí hodnoty směrnice, či klesající. Podle toho je následně klasifikujeme jako funkce konvexní, či konkávní na daném intervalu hodnot nezávisle proměnné. Směrnice funkce rovněž poskytuje informaci o tom, kde můžeme hledat extrém funkce, tedy její maximum, či její minimum. Vzhledem k tomu, že podmínky optima vždy vyjadřují podmínky maximalizace či minimalizace nějaké cílové funkce vzhledem k omezení, jedná se opět o klíčovou informaci, kterou je potřeba umět interpretovat.

Drtivá většina ekonomických vazeb má povahu nelineárních funkcí. Ukážeme si však, že za určitých podmínek lze situaci zjednodušit tak, že nelineární funkce zlinearizujeme. Nyní několik vstupních pojmů.

Vymezme pojem funkce tak, jak s ní budeme níže pracovat. Reálná funkce jedné reálné proměnné je zobrazení z množiny reálných čísel do množiny reálných čísel, které každému reálnému číslu z definičního oboru přiřadí nejvýše jedno reálné číslo z oboru hodnot funkce. Definičním oborem je daná podmnožina množiny reálných čísel a oborem hodnot je množina reálných čísel. Proč je definiční obor podmnožinou reálných čísel? Víme, že množina reálných čísel obsahuje všechna čísla na otevřeném intervalu mínus až plus nekonečno. V téměř všech případech, se kterými budeme pracovat, však ekonomické proměnné, o kterých ekonomické subjekty rozhodují, nabývají kladných hodnot: např. množství statků, množství vstupů apod.

Proměnná, která představuje definiční obor funkce, se nazývá nezávisle proměnná. Jedná se o proměnnou, o jejichž hodnotách ekonomické subjekty přímo rozhodují. Její funkční hodnoty, tedy hodnoty z oboru hodnot funkce, se označují jako závisle proměnné. Firma například rozhodne, že vyrobí určitý objem produkce, to je nezávisle proměnná, a z funkce zisku, zjistíme, jak vysoký zisk takový objem přinese, což by byla závisle proměnná.

V ekonomické analýze se běžně setkáváme s reálnými funkcemi více reálných proměnných. Například spotřebitelé nenakupují pouze jeden statek, ale celou množinu statků. Funkce užitku je v tomto případě zobrazení, které každému vektoru reálných čísel z definičního oboru funkce přiřazuje nejvýše jedno reálné číslo z oboru hodnot dané funkce. Vektor reálných čísel by měl tolik prvků, kolik statků by spotřebitel nakupoval. Byť reálné funkce více reálných proměnných jsou v ekonomické analýze v podstatě všudypřítomné, v grafické interpretaci problém zjednodušujeme tak, abychom takové funkce mohli zachytit prostřednictvím jejich dvourozměrných vrstevnic. Toho dosahujeme tak, že pokud by počet nezávislých proměnných, např. počet statků přesahoval hodnotu 2, tak jejich hodnotu limitujeme na číslo 2 předpokladem. To je sice značné zjednodušení, avšak nijak nebrání pochopení podstaty rozhodovacího problému.

1.1.1 Směrnice funkce

Podívejme se nyní na příklady některých funkcí.

A/ Lineární funkce

Uvažujme funkci y = 2x. X je nezávisle proměnnou a y je závisle proměnnou. Uvažujme definiční obor pro x z intervalu nula až deset. Prostým dosazováním za x do předpisu funkce zjistíme příslušné hodnoty z oboru hodnot. Vypočtené funkční hodnoty zachycuje druhý řádek tabulky 1.1.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y = 2x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
y = 0,5x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y = 2x + 4	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
y = 21 – 3x	21	18	15	12	9	6	3	0	-3	-6	-9

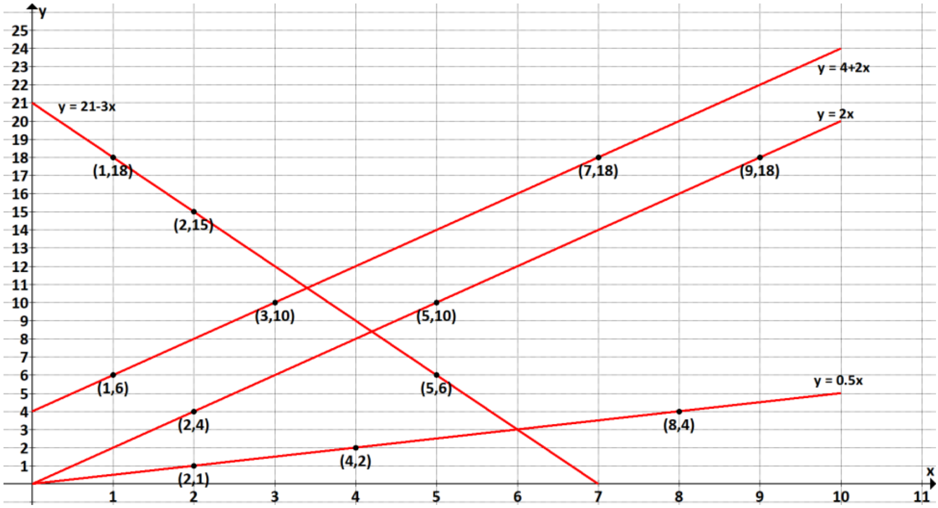
Tabulka 1.1 Příklady lineárních funkcí

Uvažujme nyní lineární funkci y = 0,5x. Její funkční hodnoty jsou ve třetím řádku tabulky 1.1. Vidíme, že obě funkce vycházejí z počátku, protože ani jedna neobsahuje konstantu, což by bylo reálné číslo, jehož výše by nesouvisela s hodnotou nezávisle proměnné. Funkce se však liší tím, jak rychle rostou jejich funkční hodnoty. V prvním případě, se vždy při přidání jednotky zvýší funkční hodnota o 2, v druhém případě se funkční hodnota zvyšuje o 0,5.

Přírůstky funkce označujeme jako směrnice funkce. Z toho plyne, že směrnice první funkce je 2 a směrnice druhé funkce je 0,5.

Přidejme nyní funkci y = 2x + 4. Její funkční hodnoty jsou zaneseny ve čtvrtém řádku. Vidíme, že funkce nevychází z nuly, což je dáno tím, že obsahuje konstantu ve výši 4. Když však porovnáme, jak se mění hodnota závisle proměnné s přírůstky nezávisle proměnné, vidíme, že hodnoty závisle proměnné se zvyšují stejným tempem jako v prvním případě. Směrnice této lineární funkce je opět 2.

Poslední lineární funkcí v tabulce je y = 21 – 3x. I tato lineární funkce obsahuje konstantu, proto nevychází z nulové hodnoty. S přírůstkem nezávislé proměnné o jednotku však hodnoty závisle proměnné klesají, a to o 3. Směrnice funkce je tedy záporná: -3.



Obrázek 1.1 Grafické zachycení lineárních funkcí

Obrázek 1.1 znázorňuje lineární funkce za tabulky 1.1. Ačkoliv poslední lineární funkce přechází do záporných hodnot, tuto její část v grafu nezachycujeme.

Vezměme si třeba funkci y = 2x + 4. Pokud bychom chtěli vyjádřit její přírůstek při změně x z 1 na 3, museli bychom poměřit příslušnou změnu funkční hodnoty (závisle proměnné) s korespondující změnou nezávisle proměnné. Nezávisle proměnná v takovém případě roste o 2. Závisle proměnná se zvyšuje o 4 (10 – 6). Směrnice tedy je 4/2, což je 2.

Vyjádřeme směrnici této funkce při změně x z 1 na 7. Hodnota závisle proměnné se nyní mění o 12 (18 – 6), nezávisle proměnná se zvýšila o 6. Směrnice funkce tedy je 12/6, což je opět 2.

Vidíme, že v případě lineární funkce je skutečně jedno, jakou změnu z definičního oboru pro výpočet směrnice použijeme, protože směrnice lineární funkce je konstantní.

Jak jsme však uvedli výše, funkce, které popisují chování vazeb mezi ekonomickými veličinami, obvykle lineární nejsou. Podívejme se proto na další příklady funkcí.

B/ Mocninná funkce - kvadratická funkce

Uvažujme funkci $y = 6x – 0,5x^2$. X je nezávisle proměnnou a y je závisle proměnnou. Uvažujme definiční obor pro x z intervalu nula až deset. Prostým dosazováním za x do předpisu funkce zjistíme příslušné hodnoty z oboru hodnot. Vypočtené funkční hodnoty zachycuje tabulka 1.2.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y = 6x – 0,5x^2$	0	5,5	10	13,5	16	17,5	18	17,5	16	13,5	10

Tabulka 1.2 Kvadratická funkce

Pokud by se nezávisle proměnná zvýšila z 2 na 3, závislé proměnná by se zvýšila o 3,5. Pokud by se nezávisle proměnná zvýšila z 6 na 7, závisle proměnná vzroste o 1,5. Pokud by se nezávisle proměnná zvýšila z 9 na 10, závisle proměnná klesne o 3,5. Vidíme, že přírůstky této funkce jsou proměnlivé a mění své znaménko. Skutečnost, že jsou proměnlivé, znamená, že daná funkce není lineární. Skutečnost, že jsou přírůstky někdy kladné a jindy záporné, znamená, že funkce na určitém intervalu z definičního oboru roste a na určitém intervalu klesá.

Obrázek 1.2 Grafické zachycení kvadratické funkce

Pokud bychom počítali směrnici při změně nezávisle proměnné z 2 na 6, pak vidíme, že závisle proměnná vzroste z 10 na 18. Směrnice dané funkce by tedy mezi těmito dvěma body byla 8/4, tedy 2. Na daný růst hodnoty x hodnota y reagovala dvojnásobným růstem.

Pokud bychom uvažovali růst nezávisle proměnné z 2 na 4, pak závisle proměnná vzroste z 10 na 16. Směrnice dané funkce mezi těmito dvěma body by byla 6/2, tedy 3. Na daný růst hodnoty x hodnota y reagovala trojnásobným růstem.

Směrnice funkce mezi dvěma body má svoji geometrickou interpretaci. Podívejme se na situaci, kdy se hodnota nezávisle proměnné mění z 2 na 6. Zelené úsečky pouze jinak graficky zachycují růsty závisle a nezávisle proměnné, o kterých jsme se zmiňovali. Vertikální zelená úsečka zachycuje změnu závisle proměnné o 8 a horizontální zelená úsečka zachycuje změnu nezávisle proměnné o 4. Pokud si graficky představíme poměr velikosti vertikální a horizontální zelené úsečky, víme, že takový poměr vyjadřuje tangens úhlu, který úsečka spojující dva zkoumané body dané funkce svírá s horizontální odvěsnou. Velikost vertikální zelené úsečky, změnu závisle proměnné, označíme jako Δy. Velikost horizontální zelené úsečky, změnu závisle proměnné, označíme jako Δx. Úhel, který v daném pravoúhlém trojúhelníku svírá přepona (spojnice bodů dané funkce) s horizontální odvěsnou, označíme α. Pro jeho tangens platí:

$$\tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Tangens tohoto úhlu vyjadřuje směrnici dané přepony, tedy spojnice dvou daných bodů kvadratické funkce. Pro její rovnici proto platí:

$$y = a + \frac{\Delta y}{\Delta x}x.$$

Víme, že její směrnice je v tomto případě 2:

$$y = a + 2x.$$

Pokud má tato lineární funkce procházet bodem [2, 10], pak její konstanta a musí po dosazení souřadnic tohoto bodu za x a y být 6. Rovnice dané přepony je proto:

$$y = 6 + 2x\ pro\ x \in \langle 2,6 \rangle.$$

Směrnice spojnice jakýchkoliv dvou bodů na této funkci tedy podává informaci o přírůstku funkce. Pokud se podíváme na spojnici bodů [2, 10] a [4, 16], na první pohled vidíme, že je tato úsečka strmější, její směrnice musí být tedy vyšší, než jaká byla v předchozím případě. Uvedené jsme již ověřili propočtem, víme, že v této situaci je směrnice dané funkce 3. S růstem hodnoty x tedy klesá směrnice této funkce.

Představme si, že bychom zjišťovali přírůstky funkčních hodnot mezi výchozím bodem na funkci [2, 10] a druhým bodem, přičemž bychom se stále přibližovali k bodu [2, 10]. První situací byl bod [6, 18], druhou situací byl bod [4, 16], třetí situací, která není v grafu zachycena, by mohl být bod [3, 13,5], pak třeba [2,2, 10,78]. Pokud si představíme nekonečně malou změnu nezávisle proměnné x, to znamená, že druhý bod na funkci by byl neodlišitelný od výchozího bodu, z původní spojnice dvou bodů na funkci by se stala tečna. Jednalo by se o tečnu k funkci v bodě [2, 10]. Ta je na obrázku 1.2 zachycena.

Její směrnici můžeme vyjádřit různě, protože vzhledem k tomu, že tečna je lineární funkce, tak je její směrnice konstantní. Její propočet naznačují kratší zelené úsečky. Při růstu hodnoty x o 1 dle dané tečny roste hodnota y o 4. Směrnice této tečny je tedy 4. Směrnice této tečny k dané kvadratické funkci v bodě [2, 10] vyjadřuje směrnici této kvadratické funkce v tomto bodě.

Z daného plyne, že můžeme v principu vyjádřit směrnici spojité nelineární funkce dvěma způsoby. První způsobem můžeme nazvat jako oblouková směrnice, jedná se o situaci, kdy vyjadřujeme směrnici pro nezanedbatelné změny nezávisle proměnné. Graficky si je představíme jako směrnice úseček, které dané body na funkci spojují.

Druhou možností je vyjádřit směrnici funkce v bodě. Tu si graficky představíme jako směrnici tečny k dané funkci v tomto bodě.

U lineární funkce tento rozdíl nehraje žádnou roli, protože, jak jsme si ukázali, směrnice lineární funkce je konstantní. Neexistuje rozdíl mezi obloukovou směrnicí lineární funkce a směrnicí v určitém bodě lineární funkce.

Podívejme se dále na interpretaci směrnice funkce v daném bodě. Jak jsme si ukázali, směrnice v bodě vyjadřuje směrnici tečny k této funkci v tomto bodě. Opět se tedy jedná o tangens úhlu, který tato tečna svírá s horizontální osou. Nyní se však změna nezávisle proměnné blíží nule. Můžeme tedy psát:

$$\tan\alpha = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{df(x)}{dx}.$$

Zápis limitně nulového přírůstku hodnoty nezávisle proměnné řeší prostřednictvím reálného čísla h, které se blíží nule. V čitateli zlomku je tedy přírůstek funkční hodnoty při nekonečně malém přírůstku hodnoty nezávisle proměnné x. Pokud uvedená limita existuje, označuje se jako derivace funkce *f(x)* v bodě x. Derivaci obvykle označujeme zápisem df(x)/dx, či dy/dx.

Směrnice funkce v bodě je tedy vyjádřená směrnicí tečny k funkci v tomto bodě, což je totéž, co hodnota derivace funkce v tomto bodě.

Derivace z toho důvodu hraje v ekonomické analýze klíčovou roli. Derivace nám umožňují zachytit přírůstky funkcí a přírůstky funkcí nám vyjadřují dopady ekonomických rozhodnutí na jednotlivé ekonomické veličiny. Pokud se firma rozhodne, že bude více produkovat, zřejmě to zvýší náklady i příjmy. Zajímá nás tedy, jak přesně se mění náklady a příjmy firmy, což jsou matematicky derivace funkce příjmů a nákladů.

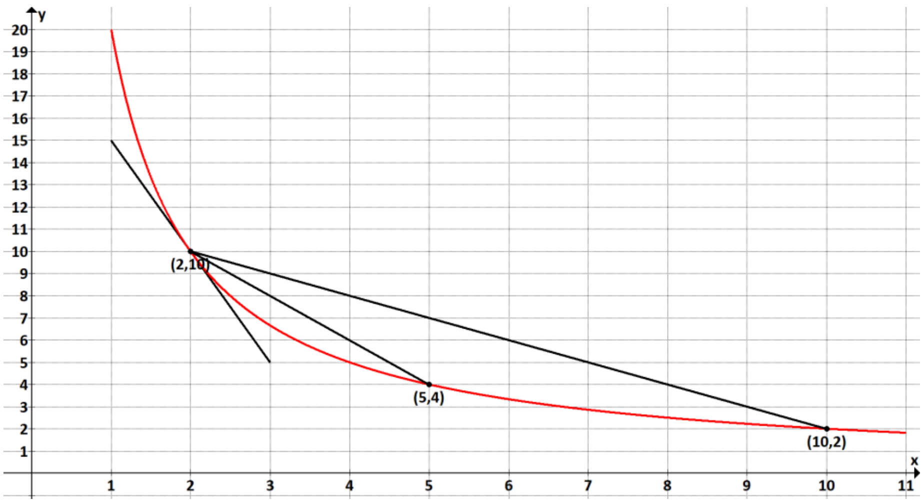
C/ Mocninná funkce

Podívejme se na další příklad mocninné funkce: y = 20/x. Definiční obor budeme limitovat na interval nula až jedenáct. Tabulka 1.3 zachycuje propočet některých funkčních hodnot.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y = 20/x	$\rightarrow\infty$	20	10	6,7	5	4	3,3	2,9	2,5	2,2	2

Tabulka 1.3 Mocninná funkce

Pokud by se nezávisle proměnná zvýšila z 2 na 3, závisle proměnná by se snížila o 3,3. Pokud by se nezávisle proměnná zvýšila z 6 na 7, závisle proměnná klesne o 0,4. Pokud by se nezávisle proměnná zvýšila z 9 na 10, závisle proměnná klesne o 0,2. Vidíme, že přírůstky této funkce jsou proměnlivé a vždy záporné. Skutečnost, že jsou proměnlivé, znamená, že daná funkce není lineární. Skutečnost, že jsou přírůstky záporné, znamená, že je funkce klesající.



Obrázek 1.3 Mocninná funkce

Pokud bychom počítali směrnici při změně nezávisle proměnné z 2 na 5, pak vidíme, že závislé proměnná klesne z 10 na 4. Směrnice dané funkce by tedy mezi těmito dvěma body byla -6/3, tedy -2. Na daný růst hodnoty x hodnota y reagovala dvojnásobným poklesem.

Pokud bychom uvažovali růst nezávisle proměnné z 2 na 10, pak závisle proměnná klesne z 10 na 2. Směrnice dané funkce mezi těmito dvěma body by byla -8/8, tedy -1. Na daný růst hodnoty x hodnota y reagovala ekvivalentním poklesem.

Z předchozího víme, že směrnice spojnice libovolných dvou bodů dávají informaci o vývoji směrnice funkce mezi dvěma body. Pokud se pohybujeme po funkci zleva doprava, dvě ukázané spojnice mezi body [2, 10] a [5, 4] a mezi body [2, 10] a [10, 2] demonstrují, že funkce je klesající, protože dané úsečky jsou klesající, mají tedy záporné směrnice. Současně je patrné, že pohybem doprava po dané funkci směrnice rostou, neboť dané úsečky klesají nižším tempem. To jsme doložili i výše uvedeným propočtem, kdy směrnice vzrostla z -2 na -1.

Zde upozorňujeme, že směrnice v ekonomické analýze často vyhodnocujeme v absolutní hodnotě, takže bychom danou situaci klidně komentovali tak, že směrnice funkce se snížila ve smyslu, že její poklesy se snižují. Takový pohled v ekonomickém kontextu dává obvykle větší smysl.

Směrnice tečny k funkci v bodě [2, 10] představuje její derivaci v tomto bodě. Vidíme, že tečna je klesající, tedy derivace funkce v tomto bodě je záporná. Když se na obrázek podíváme pozorněji, vidíme, že pokud by hodnota x vzrostla o 1, pak hodnota y při pohybu po tečně klesne o 5. Její směrnice je tedy -5, jinými slovy derivace této funkce v bodě [2, 10] je -5.

D/ Polynom třetího stupně

Uvažujme nyní funkci $y = -0{,}2x^3 + 2x^2 + 2x$. Definiční obor budeme limitovat na interval nula až deset. Tabulka 1.4 zachycuje propočet některých funkčních hodnot.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y = -0{,}2x^3 + 2x^2 + 2x$	0	3,8	10,4	18,6	27,2	35	40,8	43,4	41,6	34,2	20

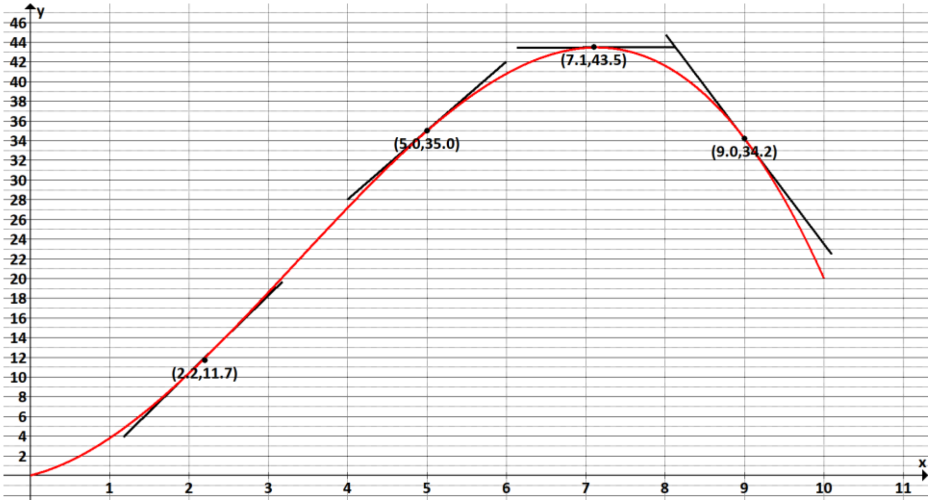
Tabulka 1.4 Polynom třetího stupně

Pokud by se nezávisle proměnná zvýšila z 1 na 2, závisle proměnná by vzrostla o 6,6. Pokud by se nezávisle proměnná zvýšila z 3 na 4, závisle proměnná vzroste o 7,6. Pokud by se nezávisle proměnná zvýšila z 5 na 6, závisle proměnná vzroste o 5,8. Pokud by se nezávisle proměnná zvýšila z 7 na 8, závisle proměnná klesne o 1,8. Vidíme, že přírůstky této funkce jsou proměnlivé a někdy jsou kladné a někdy záporné. Zpočátku jsou přírůstky kladné, a dokonce se zvyšují, následně jsou přírůstky kladné, ale snižují se, a nakonec jsou přírůstky záporné. Skutečnost, že jsou proměnlivé, znamená, že daná funkce není lineární. Skutečnost, že jsou někdy kladné, znamená, že funkce je v jisté fázi rostoucí. Současně bude funkce klesat tehdy, když jsou její přírůstky záporné.

Na obrázku 1.4 zachycujeme přírůstky funkce již pouze podle směrnic tečen k funkci ve zvolených bodech. Vidíme, že první dvě tečny mají kladnou směrnici, funkce je tedy rostoucí.

Tečna v bodě [7,1, 43,5] má nulovou směrnici. To znamená, že funkce v tomto bodě neroste ani neklesá. Tečna v bodě [9,0, 34,2] má zápornou směrnici, takže funkce klesá.

V grafu můžeme rovněž pozorovat, že zpočátku roste funkce zrychlujícím se tempem. To koresponduje s tím, co jsme zjistili propočtem vybraných hodnot. Zpočátku jsou přírůstky funkce rostoucí. Před vrcholem funkce jasně vidíme, že se její přírůstky zpomalují.



Obrázek 1.4 Polynom třetího stupně

Pojďme se na otázku proměnlivých přírůstků funkce podívat v následující části podrobněji.

1.1.2 Průběh funkce

Vezmeme postupně již představené příklady.

A/ Lineární funkce

Uvažujme příklad lineární funkce y = 2x + 4. Vyjádřeme obecně její směrnici. Víme, že funkci její směrnice získáme jako derivaci zadané funkce:

$$\frac{d(2x + 4)}{dx} = 2.$$

Derivace tento funkce je konstantou ve výši 2. Z toho plyne, že se jedná o rostoucí funkci, kdy s růstem nezávisle proměnné o jednotku, roste závisle proměnná o dvě jednotky. Pokud si vyjádříme funkci změny těchto přírůstků, což by byla druhá derivace původní lineární funkce, což je jinými slovy derivace její první derivace:

$$\frac{d^2(2x + 4)}{dx^2} = 0,$$

pouze potvrzujeme, že její přírůstky jsou stále stejné, čili jejich změna je nulová.

B/ Mocninná funkce – kvadratická funkce

Uvažujme výše uvedenou funkci y = 6x – 0,5x^2. I nadále ji uvažujeme na výše vymezeném definičním oboru. Víme, že funkci její směrnice získáme jako derivaci zadané funkce:

$$\frac{d(6x - 0{,}5x^2)}{dx} = 6 - x.$$

Na první pohled je zřejmé, že funkce její směrnice závisí na hodnotě nezávisle proměnné. S tím, jak se bude měnit hodnota x, se bude rovněž měnit směrnice funkce, tedy její přírůstky. Vidíme, že s rostoucí hodnotou x budou přírůstky funkce klesat. To můžeme formálně ověřit druhou derivací dané funkce, resp. první derivací funkce její směrnice:

$$\frac{d^2(6x - 0{,}5x^2)}{dx^2} = -1.$$

Druhá derivace funkce nám tedy říká, že s růstem hodnoty nezávisle proměnné o jednotku se směrnice této kvadratické funkce sníží o 1.

Pokud se směrnice funkce s růstem hodnoty nezávisle proměnné snižuje, pak takovou funkci označujeme jako konkávní.

Vidíme, že pokud bude hodnota nezávisle proměnné nižší než 6, první derivace této kvadratické funkce bude kladná, to znamená, že daná funkce bude rostoucí. Její kladné přírůstky se však s každým zvýšením nezávisle proměnné o jednotku sníží, a to také o jednotku.

Pokud bude hodnota nezávisle proměnné vyšší než 6, první derivace této kvadratické funkce bude záporná, to znamená, že daná funkce bude klesající. Její záporné přírůstky se však s každým zvýšením nezávisle proměnné o jednotku ještě dále sníží, a to také o jednotku.

V prvním případě tedy bude tato kvadratická funkce rostoucí a konkávní a ve druhém bude klesající a konkávní.

Pokud bude x rovno 6, její přírůstek bude 0. Daná funkce tedy nebude růst ani klesat.

Uvedené přesně koresponduje s tím, co je zachyceno na obrázku 1.2

C/ Mocninná funkce

Uvažujme nyní již výše analyzovanou funkci ve tvaru y = 20/x. I nadále ji uvažujeme na výše vymezeném definičním oboru. Víme, že funkci její směrnice získáme jako derivaci zadané funkce:

$$\frac{d(20/\mathrm{x})}{dx} = -\frac{40}{x^2}.$$

Je patrné, že její směrnice bude záporná. Daná funkce tedy bude klesající. Rovněž vidíme, že její první derivace je závislá na hodnotě nezávisle proměnné, což znamená, že směrnice bude proměnlivá. Podívejme se prostřednictvím druhé derivace na to, jak přesně:

$$\frac{d^2(20/\mathrm{x})}{dx^2} = \frac{20}{x^3}.$$

Druhá derivace této mocninné funkce je kladná, což znamená, že její přírůstky porostou. Jak to v uvedené situaci interpretovat? První derivace, říká, že funkce bude ryze klesající. Druhá derivace, že její přírůstky rostou. Tedy dohromady to znamená, že její úbytky budou klesající. Funkce sice bude klesat, ale tempo jejího poklesu se bude snižovat. To jasně dokumentuje obrázek 1.3

Funkce s rostoucími přírůstky, či klesajícími úbytky, tedy funkce s kladnou druhou derivací se označují jako konvexní. Tato funkce je tedy ryze klesající a ryze konvexní.

Předchozí funkce byla v určité části definičního oboru rostoucí, v další části definičního oboru byla klesající a současně byla ryze konkávní, její přírůstky totiž vždy klesaly.

D/ Polynom třetího stupně

Uvažujme nyní již výše analyzovanou funkci ve tvaru y = $-0{,}2x^3 + 2x^2 + 2x$. I nadále ji uvažujeme na výše vymezeném definičním oboru. Víme, že funkci její směrnice získáme jako derivaci zadané funkce:

$$\frac{d\left(-0{,}2\mathrm{x}^3 + 2\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x}\right)}{dx} = -0{,}6x^2 + 4x + 2.$$

Vidíme, že první derivace dané funkce má podobu kvadratické funkce. To ze všech uvedených příkladů představuje zdaleka největší proměnlivost vývoje přírůstku dané funkce. Podívejme se na to, jak se chovají přírůstky, tedy uveďme druhou derivaci daného polynomu:

$$\frac{d^2\left(-0{,}2\mathrm{x}^3 + 2\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x}\right)}{dx^2} = -1{,}2x + 4.$$

Druhá derivace je závislá na hodnotě nezávisle proměnné a současně se jedná o lineární funkci se zápornou směrnicí. Z toho plyne, že pro určité hodnoty x budou přírůstky rostoucí a pro jiné hodnoty x budou přírůstky klesající. Pokud bude hodnota x nižší než

4/1,2, pak budou přírůstky rostoucí. Pro hodnotu x vyšší než 4/1,2 budou přírůstky daného polynomu klesající.

Z toho plyne, že pro x do 4/1,2 bude funkce konvexní (přírůstky rostou) a pro x vyšší než 4/1,2 bude funkce konkávní (přírůstky klesají). Pro x rovno 4/1,2 by funkce vykazovala tzv. inflexní bod, její druhá derivace by byla nulová, což znamená, že se funkce mění z konvexní na konkávní (či obráceně).

Nyní je ještě třeba odpovědět na otázku, kdy je funkce rostoucí a kdy klesající. Tuto odpověď získáme samozřejmě pohledem na absolutní výši přírůstků, což je informace obsažena v první derivaci funkce. Můžeme si položit otázku, pro jak vysoké x budou přírůstky nulové. Položíme tedy první derivaci funkce rovnu nule:

$$-0{,}6x^2 + 4x + 2 = 0.$$

To je zřejmě totéž co:

$$x^2 - \frac{20}{3}x - \frac{10}{3} = 0.$$

Vyřešením zjistíme, že funkční hodnota je nulová při x rovno přibližně 7.1 (druhá hodnota x, při které by rovnost platila, je záporná, což je mimo stanovený definiční obor funkce).

Z toho tedy plyne, že pokud je x nižší než 7,1, funkce daného polynomu je rostoucí, a pokud je vyšší než 7,1, je funkce klesající. Pokud je x rovno 7,1, funkce daného polynomu neroste ani neklesá.

Můžeme dát obě informace dohromady. Pro hodnoty x nižší než 4/1,2 je daný polynom rostoucí a konvexní funkcí, pro x rovno 4/1,2 je funkce rostoucí a je v inflexním bodě, pro x mezi 4/1,2 a 7,1 je funkce rostoucí a konkávní, pro x = 7,1 funkce neroste ani neklesá a je konkávní, pro x vyšší než 7,1 je funkce klesající a konkávní.

Uvedené přesně koresponduje s obrázkem 1.4.

1.1.3 Extrémy funkce

Předchozí debatu doplníme o pohled na extrémy funkce, tedy maxima a minima funkce. Otázka toho, co platí v extrému funkce, však již v podstatě byla zodpovězena.

Pokud máme najít hodnotu nezávisle proměnné z definičního oboru, při které je dosaženo nejvyšší či nejnižší hodnoty v oboru hodnot, je potřeba, aby daná funkce nerostla ani neklesala. Pokud totiž funkce roste, je jasné, že nemůže být v minimu, protože pro nižší hodnoty nezávisle proměnné dosahovala jistě nižších hodnot z oboru hodnot a současně s dalším růstem se její funkční hodnoty zvýší, takže nemůže být v maximu. Pokud funkce klesá, je jasné, že není v maximu, protože pro nižší hodnoty nezávisle proměnné dosahovala vyšších funkčních hodnot a současně nemůže být v minimu, protože se její funkční hodnoty ještě sníží.

Nutnou podmínkou extrému funkce proto je, že nesmí růst ani klesat, což znamená, že její přírůstky jsou nulové. To nastává tehdy, když je její první derivace rovna nule.

Pokud se má jednat o maximum, zřejmě je potřeba, aby hodnota funkce před dosažením nulové první derivace rostla a po dosažení nulové první derivace klesala. Z toho plyne, že v maximu daném nulovou první derivací je funkce konkávní.

Pokud je tedy první derivace funkce nulová a druhá derivace záporná, dosahuje funkce lokálního maxima.

Pokud se má jednat o minimum, zřejmě je potřeba, aby hodnota funkce před dosažením nulové první derivace klesala a po dosažení nulové první derivace rostla. Z toho plyne, že v minimu daném nulovou první derivací je funkce konvexní.

Pokud je tedy první derivace funkce nulová a druhá derivace kladná, dosahuje funkce lokálního minima.

Funkce však může nabývat extrémů i mimo body, ve kterých je její první derivace nulová. Jedná se o krajní body definičního oboru. To znamená, že na daném definičním oboru, je třeba zkoumat funkční hodnoty v krajních bodech funkce a dále v bodech, kdy funkce neroste ani neklesá, tedy její první derivace je nulová.

A/ Lineární funkce

Výše jsme vyjádřili, že první derivace funkce $y = 2x + 4$ je 2. Funkce tedy stále roste. Funkce tedy zřejmě nabývá extrému při poslední hodnotě x, která spadá do definičního oboru. Tu jsme vymezili jako x rovno 10. Funkce $y = 2x + 4$ proto nabývá maxima při x rovno 10 a dosahuje funkční hodnoty 24. Naopak při x rovno 0, dosahuje minima, konkrétně nulové funkční hodnoty.

B/ Mocninná funkce – kvadratická funkce

První derivace funkce $y = 6x – 0,5x^2$ je nulová, když x je rovno 6. Současně platí, že druhá derivace této kvadratické funkce je vždy záporná, funkce je tedy konkávní.

Funkce dosahuje maxima při x rovno 6 a její maximální funkční hodnota je 18.

Na vymezeném intervalu pro definiční obor funkce dosahuje svého minima pro x rovno 0, kdy je její funkční hodnota nulová.

C/ Mocninná funkce – kvadratická funkce

Uvedená první derivace dané mocninné funkce y = 20/x nikdy na vymezeném definičním oboru nenabývá nulové hodnoty. Její extrémy tedy budou ležet v krajních bodech definičního oboru. Pokud se bude x blížit nule, platí:

$$\lim_{x \to 0} \frac{20}{x} = \infty.$$

Tedy pro x blížící se nule se funkční hodnota funkce blíží nekonečnu.

Pro x rovno 10 je funkční hodnota rovna 2, což je v daném definičním oboru minimum této mocninné funkce.

D/ Polynom třetího stupně

Uvedená první derivace polynomu $y = -0{,}2x^3 + 2x^2 + 2x$ nabývá nulové hodnoty, když je x rovno přibližně 7,1. Funkční hodnota v takovém případě dosahuje přibližně 43,5. Už jsme ukázali, že při x rovno 7,1 je tato funkce konkávní, je tedy jasné, že se jedná o maximum.

Minimum funkce se bude nacházet v krajních bodech intervalu definičního oboru, konkrétně, když x je rovno nule, je funkční hodnota daného polynomu nulová.

Při řešení optimalizační úlohy, jejímž cílem je nalezení maxima či minima nějaké cílové funkce, se hledá její první derivace, která musí být nulová. To znamená, že funkční hodnota se v takové situaci nemění, říkáme, že jsme nalezli stacionární bod dané funkce. Z pohledu ekonomické interpretace to znamená, že se vyrovnávají dodatečné pozitivní a negativní dopady nějakého ekonomického rozhodnutí. To podrobně uvidíme v následující kapitole při analýze různých rozhodovacích problémů.

E/ Vázané extrémy

Většina ekonomických rozhodovacích problémů je explicitně formulována tak, že se hledá extrém cílové funkce při daném omezení. To velmi dobře koresponduje s podstatou ekonomického problému. Podstatou ekonomických problémů je totiž vzácnost zdrojů, což je obvykle vyjádřeno přímo funkcí určitého omezení, kterému ekonomické subjekty v dané situaci čelí. Při tomto omezení chtějí dosáhnout co nejvyšší, nebo co nejnižší hodnoty určité cílové funkce (užitku, nákladů, příjmů apod.).

Technicky vzato jsou tedy ekonomické rozhodovací problémy úlohami tzv. vázaných extrémů. Pokud mají omezení těchto úloh povahu rovnic (ne tedy nerovnic), tak se řeší s využitím metody Lagrangeových multiplikátorů.

Nechť $z = f(x,y)$ je cílová funkce, kde x a y jsou nezávisle proměnné a z je závisle proměnná a $g(x,y) = 0$ je funkce omezení. Metoda Lagrangeových multiplikátorů ukazuje, že lze s využitím reálného čísla, které označíme λ, zformulovat funkci, která se označuje Lagrangián, a která je dána součtem cílové funkce a omezení, které je násobeno daným reálným číslem:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Reálné číslo λ se označuje jako Lagrangeův multiplikátor. Pokud by rozhodovací úloha obsahovala více než jedno omezení, přičetla by se všechna omezení k cílové funkci pomocí různých Lagrangeových multiplikátorů. Lagrangeova funkce je funkcí nezávislých proměnných cílové funkce a Lagrangeova multiplikáru, či Lagrangeových multiplikátorů při existenci více omezení. Cílová funkce a funkce omezení musejí být spojité.

Při výše uvedeném platí, že v extrému cílové funkce při splnění daného omezení jsou splněna daná omezení a současně jsou první parciální derivace Lagrangeovy funkce rovny nule. Tedy pro optimální hodnoty nezávislých proměnných platí:

$$\frac{\partial\mathcal{L}(x,y,\lambda)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}(x,y,\lambda)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}(x,y,\lambda)}{\partial\lambda} = 0.$$

Derivací Lagrangeovy funkce podle Lagrangeova multiplikátoru, kterou položíme rovnu nule, vždy dostaneme funkci omezení. Takový bod, který splňuje uvedené podmínky, se nazývá stacionárním bodem Lagrangeovy funkce. Pokud není ze zadání zřejmé, jakého extrému může být dosaženo, je potřeba ověřit, zda nalezený stacionární bod, či stacionární body, představují maximum, minimum, či sedlový bod funkce.

Uveďme jednoduchý příklad. Cílová funkce bude reálná funkce dvou reálných proměnných $z = 2x^2y^3$. Omezení úlohy bude jen jedno: $x + 2y = 10$. Cílem je najít maximum cílové funkce při daném omezení.

Sestavíme Lagrangeovu funkci:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 2x^2y^3 + \lambda(x + 2y - 10).$$

Funkce omezení tedy musíme vyjádřit tak, aby se na jeho pravé nebo levé straně vyskytovala nula. Vyjadřujeme ho tedy v implicitním tvaru. Omezení je možné k cílové funkci přičítat, nebo je možné jej odčítat; na výsledek to nemá žádný vliv.