JAN HENDL A KOLEKTIV

ZÁKLADY MATEMATIKY, LOGIKY A STATISTIKY PRO SOCIOLOGII A OSTATNÍ SPOLEČENSKÉ VĚDY V PŘÍKLADECH

KAROLINUM

Základy matematiky, logiky a statistiky pro sociologii a ostatní společenské vědy v příkladech

Jan Hendl a kolektiv

Recenzovali:
RNDr. Jindra Reissigová, PhD.
RNDr. Marek Malý, CSc.

Autoři:
Jan Hendl
Martin Moldan
Tereza Ranošová
Jakub Siegl
Martin Štrobl
Jan Žáček

Vydala Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum
Praha 2021
Sazba Jan Hendl
Druhé, rozšířené vydání

ISBN 978-80-246-4869-9
ISBN 978-80-246-4326-7 (online : pdf)

Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum

www.karolinum.cz
ebooks@karolinum.cz

Obsah

I Matematika a logika

1 Úvod do matematiky . . . 13
2 Lineární rovnice . . . 32
3 Vektory . . . 45
4 Matice . . . 56
5 Logika . . . 86
6 Množiny, relace . . . 119
7 Booleova algebra . . . 140
8 Millova pravidla, QCA . . . 154
9 Analýza sociálních sítí . . . 169
10 Kombinatorika . . . 195
11 Pravděpodobnost . . . 203
12 Markovovy řetězce . . . 224
13 Racionální volba . . . 239
14 Hry se ztrátou nebo ziskem . . . 245
15 Derivace, integrál, modelování . . . 256

II Statistika

1 Úvod do statistiky . . . 287
2 Experimentální vs. observační design . . . 295
3 Popisná statistika . . . 304
4 Náhodné veličiny . . . 321
5 Diskrétní pravděpodobnostní rozdělení . . . 338
6 Normální rozdělení . . . 345
7 Zákon velkých čísel, centrální limitní věta . . . 355
8 Spojitá rozdělení a rozdělení statistik . . . 364
9 Teorie statistického usuzování . . . 372
10 Statistická významnost, velikost účinku . . . 384
11 Jednovýběrový z-test pro průměr . . . 394

12 Jednovýběrový t-test pro průměr 399
13 Dvouvýběrový t-test (2 nezávislé výběry) 406
14 Párový t-test (2 závislé výběry) 416
15 Test dobré shody a kategoriální proměnná 422
16 Závislost mezi kategoriálními proměnnými 430
17 Jednovýběrový z-test pro relativní četnost 438
18 Dvouvýběrový z-test pro relativní četnosti 445
19 Neparametrické metody 452
20 Korelační koeficient 466
21 Lineární regresní model 475
22 Doporučení k využívání statistiky 492

III Přílohy

1 Model argumentace podle Toulmina 505
2 Základní vzorce statistiky 509
3 Matematické vzorce, grafy funkcí a tabulky 512
4 Řešení příkladů 525
5 Použitá a doporučená literatura 554

Předmluva

Porozumění základům matematiky a statistiky tvoří často předpoklad pro to, aby mohli studující navázat ve svých oborech na práci velkých předchůdců, aby se udrželi „na ramenou obrů“ a někdy i viděli dál než oni.

Znalostní požadavky v prvních semestrech studia sociálních věd, pokud jde o matematiku a statistiku, se liší od látky, jejíž zvládnutí se předpokládá při studiu přírodních a technických věd. Většinou jde o matematické pojmy a techniky, které lze využít při osvojování probíraných statistických metod (Beneš, Drulák 2020; Gill 2006; Moore, Siegel 2014; Novotná, Špaček, Šťovíčková Jantulová 2019).

Studující se matematice spíše vyhýbají. Je to způsobeno mimo jiné okolností, že střední úroveň vzdělávání je dostatečně nepřipravila, v horším případě se v nich utvrdil pocit jisté úzkosti z matematiky (Jones, Goldring 2014). Negativní pohled studujících na matematiku a vlastní matematické schopnosti dokládají empirické studie (např. Murton, Lehtinen 2003). Zdůvodnění pro tento stav lze přijmout, upřednostňujeme však jiný postoj. Perspektivu má poučený a tvořivý přístup k matematice, logice i statistice.

Matematika je potřeba při zvládání kvantitativních výzkumných metod. Především objasňování vícerozměrných statistických metod se neobejde bez znalostí základů vektorového a maticového počtu. Jak v kvalitativním, tak v kvantitativním výzkumu využíváme logické principy. S jejich pomocí jsou dokonce vyvinuty metody kvalitativní komparativní analýzy (QCA), která dnes přitahuje velkou pozornost. Nejjednodušší modely časových řad jsou dobrým příkladem mnoha aplikačních možností matematického modelování a využití principů vektorového a maticového počtu. Základy grafů a sociálních sítí je nutné pochopit, protože se pomocí nich řeší problémy v souvislosti s otázkami, které vyvstávají například při využívání internetu (Bonacich, Lu 2014).

Z těchto skutečností autorská skupina vycházela, když se rozhodovala, jaké partie z matematiky do textu zařadit a jak je podat. Také zohlednila, že se jedná o doplněk k přednáškám o základech matematiky a statistiky pro studující bakalářského studia sociologie a ostatních sociálních věd. Přednášející, případně jeho/její/jejich pomocníci a pomocnice, rozhodují, o čem se bude mluvit a co se bude procvičovat.

První část knihy je věnována matematickým základům. Nejprve jsou jednoduše představeny vybrané matematické koncepty, které jsou poté rozšířeny v dalších kapitolách o speciálnější témata, které matematicky zaměřené sociální vědy potřebují. Text se zabývá např. QCA metodou, aplikací jednoduchých náhodných procesů, modelů epidemií, analýzou sociálních sítí, teorií rozhodování a teorií her.

Druhá část knihy se zaměřuje na představení užitečných konceptů statistiky nezbytných pro elementární práci s daty a jejich použití pro vyvozování zobecňujících závěrů. Je probrána popisná statistika, náhodná proměnná, pravděpodobnostní rozdělení a pojmy pojící se s těmito tématy. Větší prostor je věnován porozumění a demonstraci testovaní statistických hypotéz. Text seznamuje nejprve s jednoduchými metodami (mezi které patří např. z-testy nebo t-testy) a poté s metodami složitějšími, jako jsou např. test dobré shody, analýza kontingenčních tabulek nebo neparametrické metody. Také se osvětlují principy a konstrukce intervalů spolehlivosti. Druhá část knihy je uzavřena úvodem do regresní analýzy.

Každá kapitola obsahuje základní a zjednodušeně pojatou teorii a několik řešených modelových příkladů typických pro dané téma. Modelové příklady jsou základním prvkem této publikace. Na konci každé kapitoly jsou navíc uvedeny další podklady k procvičení společně s výsledky. Text uzavíráme statistickými tabulkami a užitečnými vzorečky. Diagnostický test předpokládaných vstupních znalostí naleznou čtenáři v příkladech k procvičení v první kapitole.

Při aplikaci matematických a statistických metod hrají důležitou roli počítače a příslušný software. V tomto směru doporučujeme tabulkové programy *Excel* od Microsoftu, *Calc* z OpenOffice, komerční statistický systém *SPSS*, volné statistické systémy *PSPP*, *JASP* (oba tyto programy se snaží nahradit systém *SPSS*, *JASP* zpřístupňuje navíc strukturální modelování SEM a síťovou analýzu) a internetový statistický program *SISA* a volný programovací jazyk *R* nebo volný matematický systém *Octave*. Také je cenná knížka Mareše, Rabušice a Soukupa *Analýza sociálně vědních dat [nejen] v SPSS* (vyd. Masarykova univerzita).

Tato kniha by nevznikla bez pomoci mnoha lidí. Dík patří všem, kteří přispěli k její přípravě: studentkám a studentům z FSV UK, zvláště T. Baloučkové (podklady pro kapitoly 2, 3, 10 a 11 z matematiky), L. Rozumkové (podklady pro kapitoly 2, 3, 10 a 11 z matematiky) nebo K. Hanzlíkovi (podklady pro kapitoly 10, 11 a 12 ze statistiky), statistikovi a sociologovi P. Soukupovi z FSV UK, logikům M. Pelišovi a P. Arazimovi a oběma recenzentům J. Reissigové a M. Malému z AV ČR.

Koordinátor autorského kolektivu upřímně děkuje všem spoluatorům, zejména mgr. J. Žáčkovi, za jejich příspěvek k této knize. Také je vděčný za přátelskou asistenci PhDr. J. Koukalovi, Ing. K. Novotnému, doc. PhDr. Richardu Papíkovi a prof. MUDr. Š. Svačinovi.

Za chyby v textu přejímá zodpovědnost autorský kolektiv. Za případná pochybení se omlouváme. Budeme každému čtenáři vděční za jakékoliv připomínky a upozornění na nalezené nedostatky a možná vylepšení.

Značení:

$\mathbb{N}$ ... množina přirozených čísel

$\mathbb{Z}$ ... množina celých čísel

$\mathbb{Q}$ ... množina racionálních čísel

$\mathbb{R}$ ... množina reálných čísel

Část I

Matematika a logika

Kapitola 1

Úvod do matematiky

Tradičně byly teoretické vztahy v sociálních vědách formulovány především pomocí kvalitativních pojmů (nemáme na mysli ekonomii). Matematické metody se nepovažovaly za dostatečně vhodné pro rozvíjení teoretického porozumění. Matematika hraje velkou roli v přírodních vědách a biologii, od kterých se sociální vědy liší v mnoha ohledech. Z příslušných úvah proto plyne, že nemůže jít o vulgární přenos přírodovědeckého myšlení přímo do sociálních věd (Lazarsfeld[1] 1954). V posledních desetiletích se matematika a statistika staly důležitými prostředky modelování i v sociálních vědách. V literatuře se objevují speciální matematické metody a postupy. Těm by měli studující porozumět, aby mohli kriticky posoudit popisované skutečnosti, případně zvolený přístup přetvořit.

Příkladem rozšířené aplikace matematiky v sociálních vědách je síťová analýza. Ta se stala domovem výzkumnic a výzkumníků rozličných zájmů, které sahají od konstrukce osobní identity k epidemiologii, od etnografie po analýzu struktur v internetu.

[1] Lazarsfeld, Paul, Felix (1901-1976), rakousko-americký sociolog. Věnoval se zejména statistickým metodám a výzkumu veřejného mínění.

Demokracie a matematika

„Pokud jsem viděl dále než ostatní, pak to bylo proto, že jsem stál na ramenou obrů“, řekl fyzik Isaac Newton (1643-1727) v souvislosti s hodnocením významu matematické analýzy pro jeho objevy. Podobně se vyjadřoval Albert Einstein (1879-1955), největší fyzik 20. století. Mezi Newtonem a Einsteinem byla časová mezera stovky let, ale pohled na matematiku měli podobný.

Uvedená myšlenka byla vyslovována mnohokrát autory reformy výuky matematiky na amerických základních a středních školách v 90. letech minulého století. Eseje v knížce „Na ramenou obrů“ (Steen 1990) poukazovaly k novým pohledům na didaktiku matematiky pro mládež přicházejícího století. „Na ramenou obrů“ pro pedagogy symbolizovalo snahu pomáhat studentům při hledání konceptů matematiky tak, aby docházelo k lepšímu pochopení světa a řešení jeho problémů. Tamějším pedagogům záleželo také na propojení matematiky a demokracie. Matematika hraje určitě významnou roli nejenom ve vědě, ale také při rozvíjení konceptu svobodného občana v demokracii.

Například politici a jejich příznivci se při volbách ohánějí čísly bez omezení a zodpovědnosti. Novináři informují o rozporných číslech s nedostatkem reflexe a odborného vhledu o jejich přesnosti a konzistenci. Pro fungování demokracie je tedy žádoucí jistá míra znalosti „matematiky voleb“ a statistiky, matematická gramotnost občana. Matematická gramotnost však není v tomto pojetí pouze soubor určitých matematických dovedností, nýbrž také zahrnuje uvažování o povaze a kvalitě interakce mezi jedincem s těmito dovednostmi a sociální situací nebo prostředím. To implikuje, že taková gramotnost nemá jednou provždy stejný význam, protože sociální situace a prostředí se neustále proměňují v čase.

Pro pedagogy jsou v této souvislosti aktuální myšlenky filosofa a pedagoga Johna Deweye[1]. Ten byl velkým příznivcem moderní demo-

[1] Dewey, John (1859-1952), americký filozof, pedagog, psycholog a reformátor vzdělávání. Je považován za jednoho ze zakladatelů filozofie pragmatismu.

kracie. Ve svém díle upomínal, že změna převažuje kontinuity. Proto je podle něho nutné, aby došlo k přeformulování gramotnosti, která musí držet krok s nikdy nekončícím procesem změn. Je to zapotřebí, protože také lidská přirozenost a společnost se neustále mění. Pro Deweyho se věc stává složitější, když se zeptáme, co gramotnost vlastně znamená pro demokratickou společnost a její ideály. Rozlišuje „inertní“ a „osvobozující“ gramotnost. První význam znamená úroveň verbálních a numerických dovedností, aby bylo možné porozumět instrukcím, provádět rutinní procedury a vykonávat úkoly standardním způsobem. Ze sociální perspektivy jde o gramotnost, kde převládají tradice a zvyky, kde je vše na svém místě a inovace jsou omezovány. „Osvobozující“ gramotnost předpokládá standardy, které podporují rozvoj dovedností při hledání informací a sílu kritiky, reflexi a rozhodnutí ke změně. Dewey má na mysli „osvícení mas“, které vede ke skutečně „vitální“ demokracii.

Matematika se mění. Mění se také možnosti aplikací (nástupem počítačů). Matematické vědy dnes zahrnují kromě čisté matematiky také statistiku, finanční matematiku, části počítačové informatiky, operačního výzkumu a bioinformatiky (například aplikace statistiky v genetice). Tyto oblasti matematiky třebaže mají mnoho společného se základy matematiky, mají zvláštní charakter, metodologii, standardy a cíle.

Z aplikované matematiky je nutné vyzdvihnout zvláště statistiku, nebo spíše vědu o datech. Bohužel běžná školní matematika jí věnuje málo pozornosti. Na školách se nevytváří most mezi školní matematikou a interpretacemi dat, mezi abstraktními výpočty a světem statistiky v medicíně, zemědělství, psychologii, ekonomii, sociologii a politice.

V demokracii vede numerická a matematická negramotnost zaručeně ke špatným rozhodnutím. Numerická a matematická gramotnost je však pouze jedním z předpokladů změny. Numerická a matematická gramotnost a sociální vědy mohou pomoci občanům dospět k rozhodnutím, která jsou zakotvena v aktuálních datech, matematických modelech, logice a ne v setrvačnosti a v neprůhledném uvažování.

Teorie, modely a matematika

Návrh teorie je hlavním cílem každé vědy. Obvykle se vyžaduje, aby teorie byla souborem obecných a logicky propojených úsporných tvrzení, které obsahují dobře definované pojmy s cílem formulovat vysvětlení specifikovaných fenoménů ve světě. Teorie mají podporovat přesnou a jasnou komunikaci, rigorózní testování, přesná měření a široké aplikace. Teorie mají mít deduktivní povahu v tom smyslu, že obsahují tvrzení, z kterých lze odvodit deduktivně další tvrzení. Teorie v sociálních vědách však většinou nemají uvedené vlastnosti. Jsou například induktivní ve smyslu, že nová tvrzení lze z nich odvodit pouze induktivně a intuitivně. (Ritzer, Ryan 2011)

Klasické teorie v sociálních vědách jsou silné v předmětném obsahu, ale až na výjimky nepoužívají nějaký formální jazyk, který by umožnil dedukce testovatelných predikcí o pojednávaných jevech. Aby se tato situace zlepšila, někteří výzkumníci či výzkumnice se zabývají vytvářením matematických modelů, přičemž určují jejich oborové předpoklady v matematických termínech, takže odvozené důsledky mohou být empiricky testovány pomocí srovnání s empirickými daty. Model určitých vztahů navazuje na jednu nebo více teorií, ale také nemusí.

V sociologii se matematické modely týkají sociálních struktur nebo sociálních procesů. Sociální sítě popisují vybrané sociální struktury. Ty se modelově reprezentují pomocí matic, ve kterých řádky a sloupce identifikují sociální jednotky a odpovídající prvky takových matic označují druh vztahu pro uvažovaný pár sociálních jednotek. Zájem o sociální struktury v tomto smyslu vedl k širokému užití matematických metod. Pomocí matematických modelů se také zachytily různé sociální procesy (sociální ovlivnění a sociální mobilita). Využívají se matematické prostředky jako teorie pravděpodobnosti, diferenciální rovnice, lineární algebra a stochastické procesy. Také se navrhují počítačové simulace (např. agent-based modeling, ABM), pokud není možné matematicky nalézt analytické řešení problému. Takto se zkoumají například otázky sociální emergence, sociální kooperace a vznik sociálního řádu.

Obecně jsou modely kognitivním nástrojem pro uspořádání lidských zkušenosti a pozorování. Zkušenosti a pozorování se však liší mezi jedinci a mohou být organizovány mnoha různými způsoby. I když se pozorování sdílejí, mohou být různě prezentovány. Každý jedinec vlastně představuje jedinečný model skutečnosti. Tyto přirozené modely zkoumá etnografie.

Formální nebo matematický model vyjadřuje určitý výsek zkušenosti a pozorování v rámci vztahů vytvářejících formální systém definovaný logikou, matematikou nebo statistikou. Přitom nutně dochází k velké redukci informací.

“Sociální život je velmi komplexní. Je dán nekonečnou množinou informací. Neznamená to, že tuto komplexitu musíme celou zachytit. Většina užitečných modelů se soustředí na jeden základní proces. Reálné situace vznikají simultánním působením mnoha procesů.“ (Land, Farao 2006)

Matematika je lidská aktivita konstruování axiomatických definic abstraktních vztahů mezi nespecifikovanými anebo libovolným prvky, přičemž se tyto vztahy zkoumají deduktivním způsobem a užitím principů logiky. Každý takový vztah, který se v tomto kontextu objeví, definuje třídu matematických objektů, např. „Markovovy řetězce“ nebo „vektorové prostory“. Jestliže je T axiomatická teorie, která definuje třídu M matematických objektů, pak entita v M je T-modelem. Takové modely hrají ústřední roli ve vědě.

V sociálních vědách se využívají matematické modely v mnoha oblastech. Pro většinu výzkumníků a výzkumnic však tento přístup spadá v jedno s teorií statistiky a T-modely většinou představují takové entity jako lineární regrese nebo teorie statistických testů. Spojení mezi matematikou a sociálními vědami jde za toto použití aplikované statistiky.

Uvažujeme dva typy rozdílností matematických modelů v sociologii (Capecchi, V. et al 2010). Známější typ rozlišuje:

a) statistické modely (klasifikační modely, modely vztahu proměnných),

b) simulační modely.

Druhý typ klasifikace vymezil Edling (2002):

a) modely procesů,

b) modely struktury,

c) modely racionální volby, agent base modely a modely umělých společností.

Oba tyto typy klasifikace modelů se překrývají, reprezentují však různé metodologické problémy a jinak přispívají k poznání.

Vyjmenujme dále čtyři důvody pro matematizaci sociálních věd.

- Reprezentace teorií. Matematika se používá pro formulaci teorií. Tím se stává struktura teorie více průhlednou. V mnoha případech stačí sestrojit několik rovnic pro vyjádření matematické části teorie.
- Explorace teorie. Jakmile je teorie popsána matematicky, je možné použít různé výpočty a odvodit kvalitativní a kvantitativní důsledky teorie. To pomáhá k jejímu lepšímu porozumění.
- Testování teorie. Predikce matematicky formulované teorie mohou být využity k jejímu testování, jestliže je konfrontujeme s daty o empirickém světě v Popperovském[1] smyslu (srov. Havlík 2015).
- Heuristiky. Pohled na matematicky formulovanou teorii může odhalit analogie k jiným fenoménům. To inspiruje k dalšímu výzkumu a vede k lepšímu porozumění daných fenoménů.

[1] Popper, Karl (1902-1994), rakousko-britský filosof. Jeho vědecká činnost je zastoupena i na poli logiky, fyziky, biologie, sociologie a politologie. Svůj filozofický systém sám označil jako kritický racionalismus.

Funkce

Ústředním pojmem v modelování je vztah (korespondence). Se vztahem se setkáváme v běžném životě velmi často. Například:

a) Každé dospělé osobě odpovídá roční příjem.

b) Každé položce v obchodě odpovídá nějaká cena.

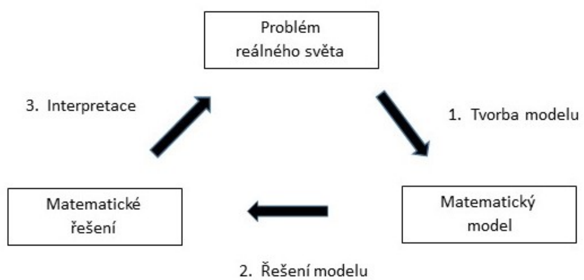
c) Každému studentu odpovídá jeho průměrné ohodnocení.

d) Výrobě x jednotek určitého výrobku ve firmě odpovídají nějaké celkové náklady.

e) Délce strany čtverce odpovídá jeho plocha.

Ve vědě hledáme vztahy mezi různými fenomény. Pokud známe dobře vztah, můžeme dělat predikce. Například analýza nákladů by měla vést k nalezení matematického vztahu mezi počtem výrobků a celkovými náklady. V medicíně bychom rádi lépe poznali vztah mezi obezitou a srdečním onemocněním, v psychologii bychom rádi předpověděli úroveň výkonu pomocí počtu opakování daného úkolu v tréninku.

Matematické modelování v procesu matematizace znamená zkoumání a tvorbu teorie o reálném světě. Usiluje se přitom o přesné určení vztahů a jejich matematické vyjádření (Capecchi et al. 2010). Proces modelování můžeme rozdělit do třech kroků (na obrázku).



První krok: Vytvoření matematického modelu (tedy matematizace problému), který vyřešením poskytuje informace o reálném světě.

Druhý krok: Vyřešení matematického modelu (hledání jeho parametrů).

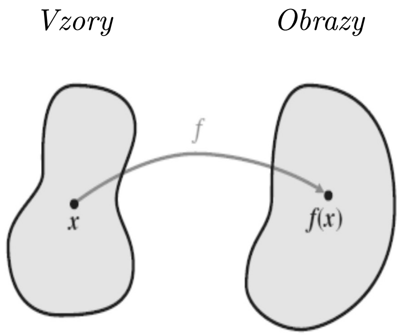
Třetí krok: Interpretace řešení matematického modelu v pojmech původního problému v reálném světě.

Je nutné se přesvědčit, do jaké míry vytvořený model odpovídá skutečnosti.

Pro úplnost poznamenejme, že klasické schéma modelování není vždy použitelné. U zvlášť komplexních vztahů jsme odkázáni na počítačové simulace, např. pomocí agent-based modelování: ABM (viz Edling 2002; Wilensky, Rand 2015). V mnoha oblastech ABM konkuruje modelování založené na rovnicích a proměnných. ABM považuje za jádro modelu množinu jedinců (nebo organizačních jednotek) a jejich interakce. Může modelovat heterogenní populace. Modely pomocí (diferenciálních) rovnic předpokládají určitou homogenitu, což je nevýhodou v oblastech, kde heterogenita hraje velkou roli. ABM se uplatňuje například v epidemiologii nebo v sociologii.

Matematika nám poskytuje mnoho abstraktních modelů. Zobrazení umožňuje jejich aplikaci (Barnett et al. 2015, Gill 2006). Při modelování hrají roli pojmy jako konstanta, proměnná, funkce a zobrazení. Každá teorie v empirických vědách je množinou tvrzení, které obsahují koncepty. Koncepty jsou představy, které nám pomáhají porozumět světu. Ke konceptům přiřazujeme konstanty a proměnné, abychom je mohli využít v teoriích. Proměnné a konstanty mohou být cokoliv, co považujeme za důležité pro teorii. Formálněji vyjádřeno, konstanta je koncept, která má jedinou fixní hodnotu. Proměnná je koncept, který může nabývat více hodnot z dané množiny hodnot. Koncepty a jejich vztahy jsou jádrem empirické vědy. Myšlení v pojmech konstant a proměnných je prvním krokem při vytváření teorií.

Zobrazení $f(x)$ definuje vztah mezi dvěma množinami prvků tak, že každému prvku z jedné množiny (množina vzorů) odpovídá právě jeden prvek z druhé množiny (množina obrazů). Obrázkem přiblížíme pojem zobrazení.



Zobrazení a funkce v tomto textu znamená totéž. Reálná funkce $f(x)$ reálné proměnné je předpis, který každému číslu x z definičního oboru D_f přiřadí právě jedno číslo y z oboru hodnot H_f. Číslo y je tedy hodnota funkce $f(x)$ vypočítaná pro danou hodnotu čísla x. Proto píšeme $y = f(x)$. Definiční obor D_f jsou všechny možné hodnoty, které lze do předpisu funkce $f(x)$ dosadit za x a určit (spočítat) tak odpovídající hodnotu y. Stručně se někdy říká, že daná funkce má pro dosazenou hodnotu smysl. Obor hodnot H_f je naopak množina všech možných hodnot y, které lze pomocí funkce $f(x)$ získat. Často užíváme i reálné funkce více reálných proměnných.

Popíšeme pět funkcí tvořících základ jiných funkcí v oblasti aplikací matematiky v sociálních vědách. Příklady jejich grafického znázornění najdete v příloze. V této souvislosti je také vhodné navštívit internetovou stránku:

http://www.analyzemath.com/Graph-Basic-Functions.html.

Uvedeme i obecný tvar lineární funkce více proměnných.

V prezentovaných vzorcích znamená znak „.“ operaci násobení. Tento znak kvůli zkrácení zápisu a bez narušení srozumitelnosti však většinou jinak vynecháváme.

1) Polynom n-tého stupně je dán předpisem

$$y = f(x) = a_n.x^n + ... + a_2.x^2 + a_1.x + b;\ \ a_n \neq 0.$$

Příklad: Předpokládá se (Moore, Siegel 2013), že vztah mezi vládními výdaji (y) a velikostí vládnoucí strany (x) se stane klesající po překročení určité hranice, protože vláda pak může zvyšovat daně, aniž by se obávala toho, že ztratí většinou. Vztah má pak tvar:

$$y = f(x) = -a_3.x^3 + a_2.x^2 - a_1.x + b.$$

Všechny koeficienty v tomto kubickém vztahu jsou kladné. Empirické údaje potvrdily uvedený předpoklad.

2) Speciální případ polynomu je polynom druhého stupně, tedy kvadratická funkce:

$$y = f(x) = c.x^2 + a.x + b;\ \ c \neq 0.$$

Příklad: Předpokládá se nelineární vztah mezi mírou transparentnosti y (málo korupce) a politickou soutěží x (Moore, Siegel 2013). U obou konců je transparentnost relativně vyšší.

$$y = f(x) = a_2.x^2 + a_1.x + b.$$

Koeficienty v tomto kvadratickém vztahu jsou kladné. Nejmenší míra transparentnosti je u smíšeného prostředí (mix autokratických a demokratických institucí).

3) Dalším speciálním případem je polynom prvního stupně, lineární funkce:

$$y = f(x) = a.x + b;\ \ a \neq 0.$$

Příklad: V roce 1980 bylo v USA průměrně v jedné domácnosti 2,76 osob. V roce 2012 činil tento údaj 2,55 osob. Předpokládáme lineární vztah mezi roky a průměrným počtem osob v jedné domácnosti i v dalším období. Kolik bude průměrný počet osob v domácnosti v roce 2030? Nejdříve zjistíme funkční vyjádření $f(x)$ lineárního vztahu, který je dán v našem případě údaji pro dva časové body. Vztah má pak tvar:

$$y = f(x) = -0{,}0066.x + 2{,}76$$

Vycházíme z předpokladu platnosti tohoto lineárního vztahu i v dalším období a po dosazení vypočítáme, že v roce 2030 bude průměrně v domácnosti 2,43 osob.

4) Exponenciální funkce je dána předpisem:

$$y = f(x) = a^x;\ a\ > 0, a\ \neq 1$$

Exponenciální funkce jsou v sociálních vědách používány v případě, že x ovlivňuje y, přičemž očekáváme, že síla vlivu se mění podle hodnoty proměnné x. Často jde o vztah, kdy y roste stále rychleji s růstem hodnoty proměnné x.

5) Logaritmická funkce je dána předpisem:

$$y = f(x) = log_b(x) \equiv x = b^y;\ b > 0, b \neq 1$$

Říkáme, že b je základ logaritmu.

Nejčastěji se používá logaritmická funkce k modelování vztahu, kdy vliv nezávisle proměnné x na závisle proměnnou y rychle klesá, pokud x roste. Například pravděpodobnost, že lidé půjdou k volbám má logaritmický vztah s počtem let strávených ve vzdělávacím procesu.

Také lze logaritmický vztah využít v situaci, kdy relativní růst proměnné v čase má lineární vliv na jinou proměnnou.

Nejjednodušší funkce s více nezávisle proměnnými $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je lineární funkce

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1.x_1 + a_2.x_2 + \ldots + a_n.x_n$$

Příklad: Předpokládá se (Moore, Siegel 2013), že pravděpodobnost účasti ve volbách (y - jde přesněji o logit pravděpodobnosti) závisí na mnoha proměnných (např. na délce vzdělávání d, příjmu p a věku v). Pak můžeme uvažovat vztah:

$$y = f(d, p, v) = a.d + b.p + c.v + konstanta$$

Po zohlednění charakteru vlivu nezávisle proměnných je lepší uvažovat vztah:

$$y = f(d, p, v) = a.ln(d) + b.p^2 + c.v + konstanta$$

Podrobněji se budeme věnovat jednoduché lineární funkci.

Lineární funkce, význam parametrů, grafické znázornění

Jednoduchý matematický model představuje lineární funkce. Lineární funkcí je možné vyjádřit vztah přímé úměry, řešit lineární rovnice i transformovat data. Pomáhá pochopit soustavy lineárních rovnic. V sociologii a v ostatních sociálních vědách je lineární vztah zpravidla základním vztahem, který hledáme (třeba pomocí regresní analýzy) mezi proměnnými v datovém souboru.

Lineární funkci $f(x)$ lze vyjádřit ve směrnicovém tvaru

$$y = f(x) = ax + b,$$

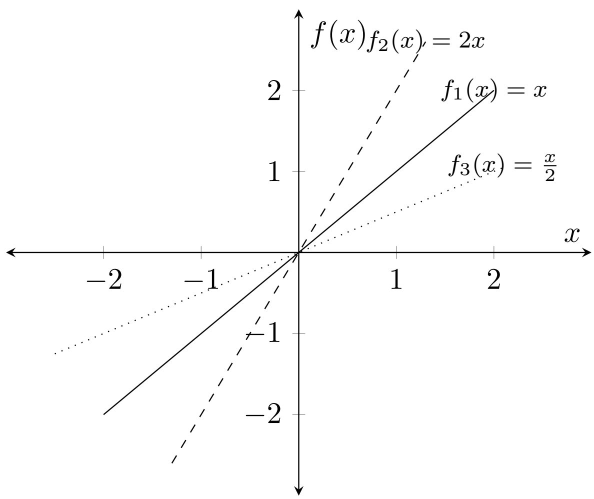
kde parametry a a b jsou reálná čísla (a, $b \in \mathbb{R}$). Proměnnou Y nazýváme často závisle proměnnou, X proměnnou nazýváme nezávisle proměnnou. V reálných aplikacích tyto proměnné označujeme i jinými symboly. Grafem lineární funkce je vždy přímka. Parametr a (směrnice) určuje sklon této přímky, parametr b její posun. Je-li $b = 0$, prochází graf funkce počátkem. Hodnotu směrnice můžeme interpretovat jako velikost změny veličiny Y při změně veličiny X. V lineárním vztahu je tato změna konstantní pro všechny hodnoty veličiny X.

Někdy zapisujeme lineární vztah také pomocí rovnice

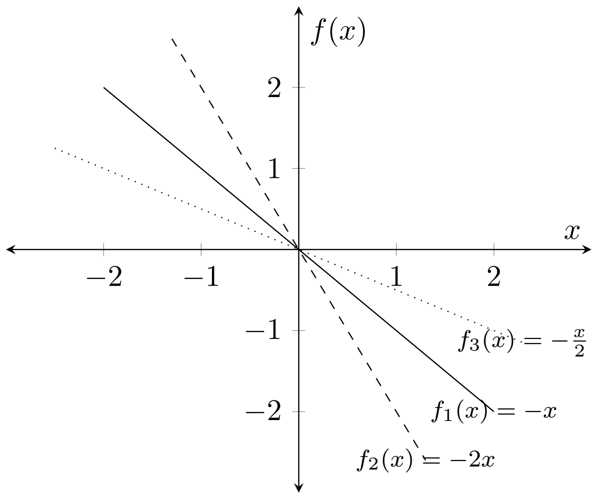
$$Ax + By = C;\ B \neq 0.$$

Pro převod na směrnicový tvar použijeme vztahy $a = -A/B$ a $b = C/B$.

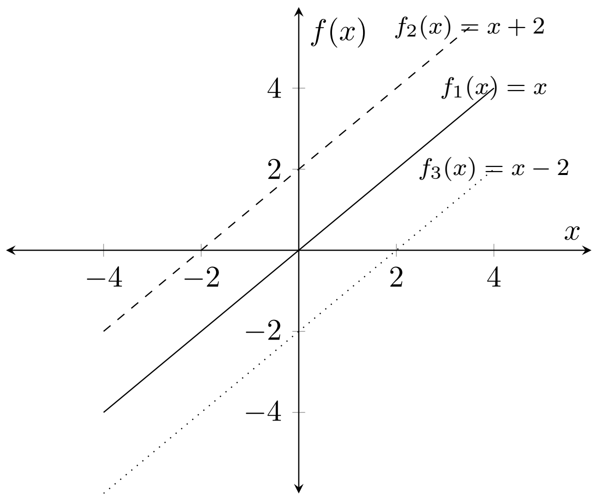
Změny sklonu (směrnice) pro různé hodnoty směrnice a ($a = 1/2$, $a = 1$, $a = 2$) při $b = 0$ ilustruje následující obrázek.



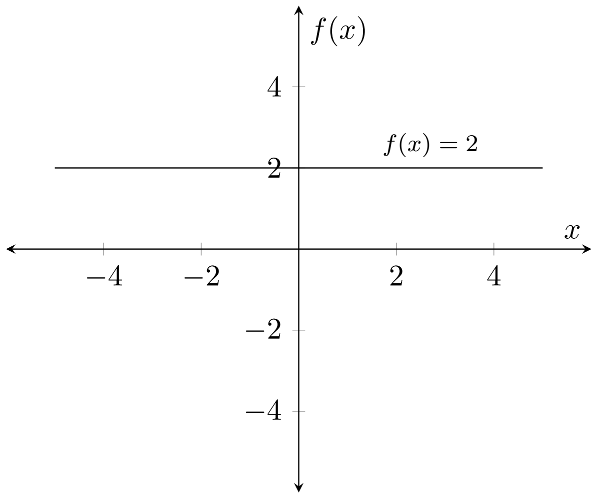
Pro směrnici $a > 0$ tedy máme rostoucí funkce. Pokud bude směrnice a záporná ($a = -1/2$, $a = -1$, $a = -2$), bude výsledkem klesající funkce.



Parametr b posouvá graf funkce $f(x)$ po ose y ($b = -2$, $b = 0$, $b = 2$).



Speciálním případem je funkce, kde $a = 0$. Pak je $f(x) = b$ bez ohledu na hodnotu nezávisle proměnné. Funkci $f(x)$ proto v tomto případě nazýváme funkcí konstantní.



Vzhledem k tomu, že grafem lineární funkce je přímka, stačí znát dva body, kterými graf funkce prochází, abychom dokázali sestavit soustavu lineárních rovnic a pomocí ní určit funkční předpis.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 1

Najděte předpis lineární funkce (tj. rovnici přímky), která prochází body $C[2,1]$ a $D[5,7]$.

Řešení: Hledáme a a b takové, že rovnost
$f(x) = ax + b$ platí pro souřadnice obou bodů C, D. Musí tedy platit

$$\begin{aligned} 1 &= a \cdot 2 + b, \\ 7 &= a \cdot 5 + b. \end{aligned}$$

To je soustava lineárních rovnic o dvou neznámých. Bez jakékoliv teorie ji lze snadno vyřešit následujícím způsobem:

Z první rovnice vyjádříme b

$$b = 1 - a \cdot 2.$$

Tento vztah dosadíme do druhé rovnice

$$\begin{aligned} 7 &= a \cdot 5 + 1 - a \cdot 2, \\ 7 &= a \cdot 3 + 1, \\ a &= 2. \end{aligned}$$

Nyní dosadíme nalezené a do vztahu, který jsme si na začátku vyjádřili z první rovnice a získáme $b = -3$.

Hledaná funkce má tedy předpis $f(x) = 2x - 3$. ■

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 2

Na závěr uvedeme ilustrační příklad aplikace lineárního vztahu ze známé americké učebnice matematiky pro sociální vědy (Gill 2006, s. 28).

Poměrně hodně dětí v USA žije v chudobě. To má u těchto dětí vliv na výsledky ve škole. V Kalifornii byla sledována schopnost číst u dětí chodící do 2.- 9. třídy pomocí testu Stanford 9. V jednotlivých distriktech státu Kalifornie (n=303) se zjišťovaly dvě veličiny. Procento dětí, kteří dostávaly zdarma obědy a procento dětí, které měly výsledky v testu nad národním mediánem (lepší stav).

Řešení: Byl ověřen lineární vliv chudoby na výsledky testu (obě měřené veličiny jsme popsali v zadání) a pomocí regresní analýzy (viz kapitola 21 o statistice v tomto textu) zjištěn trend $a = 0{,}75$ a průsečík $b = 81$. Co to znamená? S každým procentem zlepšení chudoby v distriktu se zlepší statisticky očekávané hodnocení testem o 3/4 procenta. Toto zlepšení nenastane přesně v každém distriktu, protože se jedná o statistická data. Zachytil se však určitý socioekonomický fenomén. ■

Příklady k procvičení

1.1) Načrtněte grafy funkcí a určete průsečíky těchto grafů s osami:

a) $f(x) = 7x - 4$

b) $f(x) = -2x - 2$

c) $f(x) = -8x + 9$

d) $f(x) = \frac{x}{4} + 2$

e) $f(x) = \frac{2x}{3} - 1$

f) $f(x) = 4$

g) $f(x) = 3x$

h) $f(x) = -\frac{5}{3}x$

i) $f(x) = x - 5$

j) $f(x) = \frac{x}{4}$

1.2) Určete předpis lineární funkce $f(x)$ procházející body X, Y pro

a) $X[2{,}12], Y[-2, -16]$

b) $X[9{,}7], Y[-18, -2]$

c) $X[2{,}8], Y[8{,}8]$

d) $X[0{,}5], Y[1{,}2]$

Vstupní diagnostický test

1) Proveďte operace a zjednodušte:

a) $5x^2 – 3x[4 - 3(x - 2)]$

b) $(2x + y)(3x - 4y)$

2) Napište jako desetinné číslo: $\frac{7}{8}$

3) Udejte příklad celého čísla, které není přirozené číslo.

4) Zjednodušte. Výsledek zapište výlučně s kladným exponentem. Všechny proměnné jsou kladná reálná čísla.

a) $6(xy^3)^5$

b) $(9u^8v^6)/(3u^4v^8)$

c) $(2.10^5)(3.10^{-3})$

d) $(x^{-3}y^2)^{-2}$

e) $(9a^4b^{-2})^{1/2}$

f) $(x^{0,5}+y^{0,5})^2$

g) $\frac{5^0}{3^2}+\frac{3^{-2}}{2^{-2}}$

5) V dalších úlohách proveďte naznačené operace a napište odpovědi vždy jako jediný jednoduchý zlomek. Všechny proměnné jsou kladná reálná čísla.

a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

b) $\frac{a}{bc}-\frac{c}{ab}$

c) $\frac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}}$

d) $\frac{x^2}{y}.\frac{y^6}{x^3}$

6) Zaokrouhlete na nejbližší celé číslo:

17/3

7) Vynásobením čísla x číslem 4 dá stejné číslo jako když od něho odečteme 4. Sestavte rovnici a najděte číslo x.

8) Dokažte: $log_2(1/8)=-3$

9) Nalezněte x a y souřadnice bodu, kde přímka $y=7x=4$ protíná osu Y.

10) Napište ve formě ax^p+by^q, kde a,b,p,q jsou reálná čísla:

a) $3/x+4/\sqrt{y}$

b) $8/x^2–5/y^4$

11) Nakreslete, In znamená celé číslo z x:

$y=In|x|$

12) Napište ekvivalentně v exponenciálním tvaru:

a) $log(1000) = 3$

b) $log_e(1) = 0$

13) Nalezněte x, y, b bez použití kalkulačky:

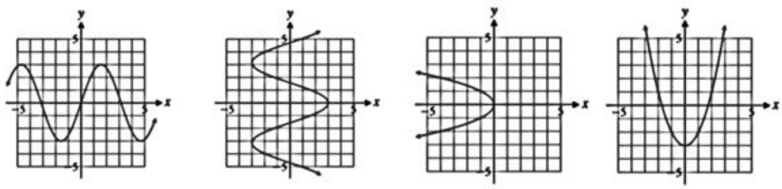
a) $log_3(x) = 2$

b) $log_7(49) = y$

c) $log_b(10^{-4}) = 4$

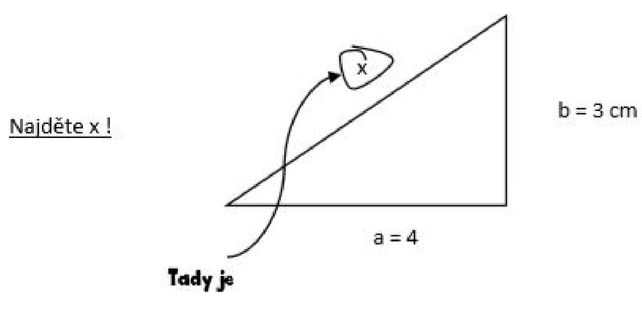
d) $log_4(x) = 0{,}5$

14) Označte znakem „+“, že se jedná o graf funkce a znakem „ − “, že se nejedná o graf funkce.



15) Napište ve formě $a + bc$, kde a,b,c jsou racionální čísla: $\frac{1}{4-\sqrt{2}}$

Z odpovědí v testu z matematiky:



Kapitola 2

Lineární rovnice

Chování některých reálných systémů lze aspoň přibližně popsat lineárními rovnicemi. Při modelování využíváme takovéto rovnice a jejich soustavy k nalezení řešení v situacích, kdy máme určeny vztahy mezi neznámými (vyjádřené například lineárními rovnicemi) a chceme zjistit, zda a pro jaké hodnoty neznámých tyto vztahy platí. Neznámou je myšlena proměnná, jejíž konkrétní hodnota se hledá.

Již soustava dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé má mnoho praktických aplikací. Její obecný tvar vypadá takto

$$\begin{aligned} ax + by &= h, \\ cx + dy &= k, \end{aligned}$$

kde a, b, c, d, h a k jsou konstanty. Dvojice hodnot $x = x_0$, $y = y_0$ je řešením této soustavy, jestliže obě rovnice po dosazení těchto dvou hodnot se změní v numerickou totožnost [dosazujeme uspořádanou dvojici (x_0, y_0)]. Když hledáme řešení této soustavy rovnic, zjišťujeme **všechny** takové dvojice (x_0, y_0).

Lineární rovnice a její řešení

Nejjednodušší rovnice je lineární rovnice pro jednu neznámou x ve formě

$$ax + b = 0; \ a \neq 0.$$

Řešením takové rovnice je hodnota, kterou když dosadíme místo proměnné x, dostaneme numerickou rovnost. K nalezení řešení lineární rovnice s jednou neznámou vedou poměrně jednoduché kroky.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 1

Vyřešte dané rovnice s jednou neznámou jejich převedením na lineární rovnice:

(i) $3x - 9 = 0$

(ii) $\dfrac{4x}{7} + 3(60 - 8x) - 16 = 0$

(iii) $3x + \dfrac{12 - 9x}{3} = 4$

Řešení:

(i) Postupujeme následovně

$$\begin{aligned} 3x - 9 &= 0 \quad / + 9, \\ 3x &= 9 \quad / : 3, \\ x &= 3. \end{aligned}$$

(ii) Postupujeme následovně

$$
\begin{aligned}
\frac{4x}{7} + 3(60 - 8x) - 16 &= 0 \quad / \times 7,\\
4x + 21(60 - 8x) - 112 &= 0,\\
4x + 1260 - 168x - 112 &= 0,\\
1148 - 164x &= 0 \quad / - 1148,\\
-164x &= -1148 \quad / : (-164),\\
x &= 7.
\end{aligned}
$$

(iii) Postupujeme následovně

$$
\begin{aligned}
3x + \frac{12 - 9x}{3} &= 4 \quad / \times 3,\\
9x + 12 - 9x &= 12 \quad / - 12,\\
0 \cdot x &= 0.
\end{aligned}
$$

Vidíme, že rovnice platí pro každou hodnotu x. Proto je řešením jakékoli reálné číslo. ■

Soustavy lineárních rovnic, řešení metodou sčítací a dosazovací, typy řešení

Abychom přiblížili koncept soustavy lineárních rovnic, uvedeme nejdříve jednoduchou modelovou situaci. Povede k soustavě dvou rovnic pro dvě neznámé. U železniční pokladny 2 dospělé osoby a jedno dítě zaplatí za lístky celkem 320 Kč. Kdyby se lístky kupovaly pro 1 dospělou osobu a 3 děti stály by 360 Kč. Jaké jsou ceny jednoho lístku pro dospělou osobu a dítě.

Sestavíme rovnice. Nechť

x = cena lístku pro dospělého.

y = cena lístku pro dítě.

Pak v naší modelové situaci platí

$$\begin{aligned} 2x + y &= 320, \\ x + 3y &= 360. \end{aligned}$$

Takže máme dvě rovnice pro dvě neznámé. Je jednoduché nalézt dvojice (x,y), které vyhovují jedné z rovnic, ale ne té druhé. Například (160, 0) vyhovuje první rovnici, ale ne té druhé. Dvojice (240, 40) vyhovuje druhé rovnici, ale ne první. Abychom vyřešili naši úlohu, musíme nalézt všechny páry cen, které vyhovují najednou oběma rovnicím [oběma rovnicím vyhovuje jenom jedna dvojice a to (120, 80), což jsou ceny jednoho lístku pro dospělého a dítě].

Tímto problémem se dále budeme zabývat v jeho obecnosti. Předpokládáme přitom lineární vztahy. Lineární rovnice o n neznámých je rovnice ve tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = b,$$

kde $x_1, \ldots, x_n$ jsou neznámé a $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$. Řešením takovéto rovnice jsou hodnoty $x_1, \ldots, x_n$, pro které rovnice platí.

K úpravě rovnice využíváme početní operace (přičítání, odčítání, násobení, dělení), které aplikujeme na obě strany rovnice. Tyto operace neovlivní podobu řešení lineární rovnice.

Soustavou (systémem) m lineárních rovnic o n neznámých rozumíme soustavu

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m, \end{array}$$

kde $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1,2,\ldots,m\}$, $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ a x_j jsou neznámé.

Řešením soustavy jsou takové hodnoty neznámých, které splňují **každou** z uvedených rovnic. Má-li soustava řešení, nazýváme ji konzistentní soustavou. Neexistuje-li řešení, jedná se o nekonzistentní soustavu. Z hlediska existence řešení mohou nastat následující situace

1. soustava nemá řešení,
2. soustava má jedno řešení,
3. soustava má nekonečně mnoho řešení.

Při řešení příkladů lze k úpravě soustavy využít následující operace

1. záměna dvou rovnic mezi sebou,
2. vynásobení rovnice nenulovým číslem,
3. přičtení jedné rovnice vynásobené číslem k jiné rovnici.

K nalezení řešení lze přistupovat pomocí různých způsobů. Na následujících řešených příkladech si ukážeme postup dosazovací a sčítací metodou.

Uveďme jednoduchý příklad.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 2

Vyřešte soustavy:

(i)

$$3x - 2y - 6z = -1, \tag{1}$$
$$-2y + 8z = 4, \tag{2}$$
$$18z = 18. \tag{3}$$

(ii)

$$12x + 4y = 44 \tag{1}$$
$$3x - 8y = -7 \tag{2}$$

(iii)
$$x + y - z = 1 \quad (1)$$
$$2x - y + z = 11 \quad (2)$$
$$-x + y + z = 3 \quad (3)$$

Řešení:

(i) Ze zadání hned vidíme, že se jedná o soustavu v tzv. trojúhelníkovém tvaru. Takové soustavy lze řešit výše uvedenou dosazovací metodou, zde ve zvláště jednoduchém provedení.
Z rovnice (3) je poznat, že $z = 1$.

Dosazením do (2) lze dopočítat y

$$\begin{aligned} -2y + 8 \cdot 1 &= 4 \quad / - 8, \\ -2y &= -4 \quad / : (-2), \\ y &= 2. \end{aligned}$$

Nyní už známe y i z, můžeme tedy dosadit do (1) a spočítat x

$$\begin{aligned} 3x - 2 \cdot 2 - 6 \cdot 1 &= -1, \\ 3x - 10 &= -1 \quad / + 10, \\ 3x &= 9 \quad / : 3, \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Řešením soustavy tedy je

$$\begin{aligned} x &= 3, \\ y &= 2, \\ z &= 1. \end{aligned}$$

(ii) Tuto soustavu vyřešíme dosazovací metodou. Ta spočívá v tom, že z jedné rovnice vyjádříme jednu neznámou a dosadíme ji do rovnice druhé. Takto lze z této soustavy dvou lineárních rovnic získat jednoduchou rovnici o jedné neznámé, tuto neznámou pak spočítat a pomocí ní určit hodnotu druhé neznámé. Tento postup je vhodné používat zpravidla pro soustavu 2 rovnic o 2 neznámých. V případě většího počtu neznámých může tento postup vést k velmi komplikovaným a nepřehledným výpočtům. Výjimkou je, jak bylo ukázáno v dílčí úloze (i), když je soustava v trojúhelníkovém tvaru. Upravíme rovnici (2) tak, abychom mohli dosadit do (1) za $12x$

$$\begin{aligned} 3x - 8y &= -7 \quad / + 8y, \\ 3x &= 8y - 7 \quad / \times 4, \\ 12x &= 32y - 28. \end{aligned}$$

Nyní máme vyjádřeno $12x$ z druhé rovnice, můžeme tedy dosadit do rovnice první a tu vyřešit

$$\begin{aligned} (32y - 28) + 4y &= 44, \\ 36y - 28 &= 44 \quad / + 28, \\ 36y &= 72 \quad / : 36, \\ y &= 2. \end{aligned}$$

Zbývá ještě dopočítat x

$$\begin{aligned} 12x &= 32 \cdot 2 - 28, \\ 12x &= 64 - 28, \\ 12x &= 36 \quad / : 12, \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Řešením soustavy tedy je

$$\begin{aligned} x &= 3, \\ y &= 2. \end{aligned}$$

(iii) Na tomto příkladu si ukážeme sčítací metodu. Ta je založena na povolených operacích s rovnicemi, z nichž podstatná je operace, která přičtením vhodného násobku nějaké rovnice k vybrané rovnici umožňuje tuto rovnici zjednodušit, a to tak, že zmenší počet neznámých, které se v ní vyskytují. Do dalšího kroku pak vstupuje opět celá soustava, jen ta vybraná rovnice je nahrazena výsledkem předchozího kroku, tedy součtem vybrané rovnice a zmíněného násobku nějaké jiné rovnice. Postupným opakováním tohoto postupu se soustava převede na trojúhelníkový tvar. Takto upravená soustava se již snadno vyřeší dosazovací metodou jako v úloze (i).

Začneme přičtením rovnice (3) k rovnici (1). Výsledkem bude rovnice (1')

$$\begin{aligned} (x+y-z)+(-x+y+z) &= 1+3, \\ 2y &= 4, \\ y &= 2. \end{aligned}$$

Šťastnou shodou okolností se v rovnici (1') nevyskytuje nejen neznámá x, ale ani neznámá z, takže je ihned známá hodnota neznámé y. Rovnice (1') je $y = 2$, nyní se tedy řeší tato upravená soustava rovnic (1'), (2), (3)

$$\begin{aligned} y &= 2, && (1') \\ 2x-y+z &= 11, && (2) \\ -x+y+z &= 3. && (3) \end{aligned}$$

K rovnici (2) se přičte dvojnásobek rovnice (3). Získá se tak (2')

$$\begin{aligned}(2x - y + z) + 2 \cdot (-x + y + z) &= 11 + 2 \cdot 3,\\ 2x - y + z - 2x + 2y + 2z &= 11 + 6,\\ y + 3z &= 17.\end{aligned}$$

Řeší se tedy upravená soustava rovnic (1'), (2'), (3)

$$y = 2, \tag{1'}$$

$$y + 3z = 17, \tag{2'}$$

$$-x + y + z = 3. \tag{3}$$

Ta již je ve trojúhelníkovém tvaru. Dosazením (1') do (2') se spočítá hodnota neznámé z

$$\begin{aligned}2 + 3z &= 17 \quad / - 2,\\ 3z &= 15 \quad / : 3,\\ z &= 3.\end{aligned}$$

Spočítané hodnoty neznámých y a z se nyní dosadí do zbývající rovnice, tedy do rovnice (3) a spočítá se hodnota x

$$\begin{aligned}-x + 2 + 3 &= 3,\\ -x + 5 &= 3 \quad / - 5,\\ -x &= -2 \quad / : (-1),\\ x &= 2.\end{aligned}$$

Řešením soustavy tedy je

$$
\begin{aligned}
x &= 4,\\
y &= 2,\\
z &= 5.
\end{aligned}
$$

■

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 3

V knize (Gill 2006, s. 175) je praktický příklad z oblasti odhadu celkového objemu nutných odměn manažérů v procentech (O). Úloha vede k řešení dvou rovnic o dvou neznámých v závislosti na čistém zisku (Z) před vyplacením odměn a daní (D). Je přitom nutné uvážit, že velikost zisku je závislá na odměnách manažérů a naopak. Proto jsou ve hře dvě rovnice. Jak budou veliké odměny?

Rovnice mají tvar

$$
\begin{aligned}
O - Z/10 + D/10 &= 0\\
O/2 - Z/2 + D &= 0\\
Z &= 100000
\end{aligned}
$$

Řešení: Vynásobíme první rovnici deseti a odečteme od ní druhou rovnici.

Získáme odhad odměn:

O = 5 260.

■

Stručně zmíníme úlohu lineárního programování, maximalizaci lineární funkce při omezujících podmínkách. Problém objasníme pouze pro jednoduchý případ, který v důsledku vede ke grafickému řešení soustavy rovnic o dvou neznámých (Šubrt et al. 2019).

Jde o maximalizaci lineární cílové funkce, v našem příkladu o maximalizaci zisku a určení příslušného výrobního programu.

Odbyt dvou výrobků X a Y je omezen maximálně možným odbytem:

$$0 \leq x \leq 700$$
$$0 \leq y \leq 500$$

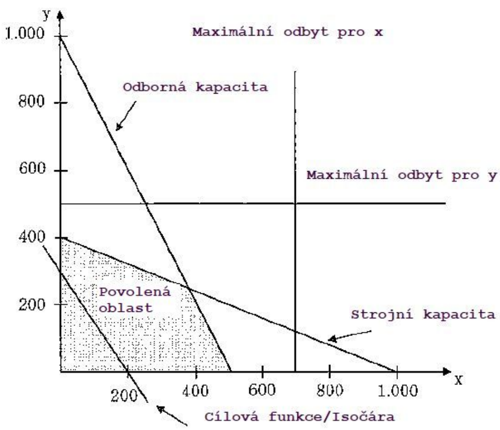
Kapacita strojů S a kapacita odborných sil OdbS jsou omezeny nerovnostmi v závislosti na množství výrobků X a Y:

$$S : 1x + 2{,}5y \leq 1000,$$
$$OdbS : 1x + 0{,}5y \leq 500.$$

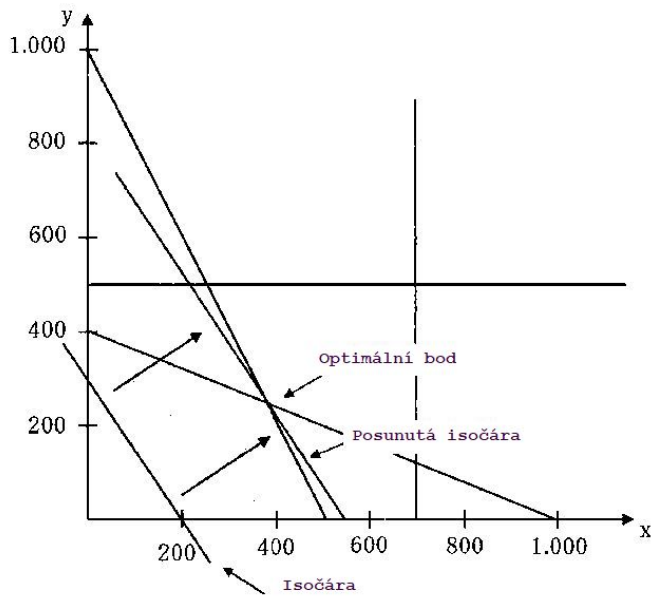
Máme maximalizovat zisk Z (cílová, účelová funkce):

$$Z : 300x + 200y.$$

Do souřadnicovém systému X (výrobky X) a Y (výrobky Y) postupně nakreslíme odbytová omezení odbytu pro výrobky X a Y, také omezení dané uvedenými nerovnostmi (včetně počáteční "isočáry", viz dále). Získáme obrázek



Zakreslíme pro daný zisk tzv. "isočáru" (vhodně určenou ziskem a tvarem cílové funkce Z). Isočárou paralelně pohybujeme v rámci povolené oblasti (určenou podmínkami pro X a Y). Na jejím kraji nalezneme optimální bod, což je řešení naší úlohy. Získáme tak výrobní program (množství výrobků X a Y) pro oba výrobky. Optimální bod a mezní isočáru, která odpovídá maximálnímu zisku, ukazuje další obrázek



Pro více proměnných a při více omezujících podmínek (omezeních) má popsaná maximalizace složitější matematickou formulaci.

Hledáme extrém maximum nebo minimum (lineární) účelové (cílové) funkce

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

kde $X = (x_1, \ldots, x_n)$, za podmínek: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$, $i = 1{,}2, \ldots, k$;

$x_j \geq 0$, $j = 1{,}2{,}...{,}n$; a_{ij}, $b_i \in \mathbb{R}$, konstanty $c_j \in \mathbb{R}$ se nazývají koeficienty účelové funkce.

Příklady k procvičení

2.1) Řešte rovnice:

a) $-8x + \frac{3x-3}{12} - 7 = -46$

b) $\frac{3z+4}{2} - \frac{2z+2}{3} + 3 = 6$

2.2) Řešte soustavy rovnic:

a)
$$\begin{aligned} 4x - 2y &= -2 \\ 2x + y &= 9 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} -x - y + 2z &= -3 \\ 4x + y - \frac{z}{2} &= 3 \\ 3x - 2y + 9z &= 3 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 3x - \frac{y+z}{5} &= -8 \\ -\frac{x}{2} + y - z &= 5 \\ -2x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

2.3) Vyřešte slovní příklad. Dva sociologové mají grantové peníze pro zkoumání využívání školních jídelen v daném městě. Chtějí udělat statistické šetření použitím 600 telefonních kontaktů a 400 návštěv v domácnostech. Firma A pro realizaci sběru dat má personál pro uskutečnění 30 telefonních kontaktů a 10 návštěv domácností za hodinu. Firma B má kapacitu pro 20 telefonních kontaktů a 20 návštěv za hodinu. Kolik hodin hodin činnosti je nutné zadat pro každou firmu, aby sociologové dosáhli přesně požadovaného objemu kontaktů.

Kapitola 3

Vektory

V sociologii a v sociálních vědách používáme vektory tehdy, pokud chceme zachytit údaje o daném jedinci, např. jeho věk, pohlaví, váhu, výšku. Vektor si někdy představujeme jako jeden řádek s údaji v tabulkovém procesoru *Excel*. V daném sloupci jsou pak údaje stejného typu. Vektory popisujeme odpovědi jedinců na jednotlivé otázky ve strukturovaném dotazníku. Vektor mnohdy neobsahuje pouze čísla. Jako hodnoty také vystupují určité dohodnuté symboly, nebo slova a celé věty.

Uvedeme tři příklady číselných p-členných vektorů. Vektor může popisovat skutečnost pomocí hodnot 0 nebo 1 podle toho, zda jedna z p událostí se uskutečnila nebo ne. Vektor může obsahovat relativní četnosti výskytu daných slov z množiny p slov v článku vzhledem k celkovému počtu všech slov v článku. Vektor může obsahovat údaje, kolik nakoupil zákazník určitého zboží z p typů. Pokud známe tyto vektory u všech zákazníků, pak jsme schopni vypočítat celkový obrat.

Vektory hrají v aplikacích matematiky a statistiky značnou roli, v této a další kapitole je budeme používat především pro vyjádření soustavy lineárních rovnic a pro pochopení konceptu lineární nezávislosti. Ten je důležitý v mnoha souvislostech lineární algebry.

Typy vektorů, základní operace

Vektor se udává pomocí svých složek. Každá uspořádaná p-tice čísel $(a_1; a_2; \ldots; a_p)$ je p-rozměrným (aritmetickým) vektorem, který značíme $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; \ldots; a_p)$. Čísla $a_1, a_2, \ldots, a_p$ pak nazýváme složkami vektoru $\boldsymbol{a}$. Kromě řádkového zápisu vektoru se používá také zápis sloupcový

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}.$$

Řekneme, že vektor $\boldsymbol{a}$ se rovná vektoru $\boldsymbol{b}$, pokud platí rovnost pro odpovídající složky, tj.

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_p = b_p.$$

Pokud chceme vektory sčítat, musíme opět postupovat po složkách

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; \ldots; a_p + b_p).$$

Odčítání funguje obdobně.

Násobení vektorů číslem k, $k \in \mathbb{R}$, se provádí také po jednotlivých složkách

$$k \cdot \boldsymbol{a} = (k \cdot a_1; k \cdot a_2; \ldots; k \cdot a_p).$$

Ke každému vektoru lze nalézt vektor opačný

$$-\boldsymbol{a} = (-a_1; -a_2; \ldots; -a_p).$$

Dále máme nulový vektor $\boldsymbol{o}$, pro který platí

$$\boldsymbol{o} = (0;\ 0;\ \ldots;\ 0).$$

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 1

Spočtěte pro $\boldsymbol{v} = (2;\ 1;\ 3)$ a $\boldsymbol{u} = (-1;\ 4;\ -2)$:

(i) $5 \cdot \boldsymbol{v}$

(ii) $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$

(iii) $\boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{u}$

Řešení:

(i) Násobíme jednotlivé složky

$$5 \cdot \boldsymbol{v} = (5 \cdot 2;\ 5 \cdot 1;\ 5 \cdot 3) = (10;\ 5;\ 15)$$

(ii) Sčítáme příslušné složky

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} = (2 - 1;\ 1 + 4;\ 3 - 2) = (1;\ 5;\ 1)$$

(iii) Nejprve vynásobíme číslem, poté odečteme

$$\boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{u} = (2 - 2 \cdot (-1);\ 1 - 2 \cdot 4;\ 3 - 2 \cdot (-2)) = (4;\ -7;\ 7)$$

■

Chceme-li násobit dva vektory mezi sebou, používáme tzv. **skalární součin**. Jeho výsledkem není vektor, ale číslo. Postup násobení spočívá ve vzájemném vynásobení příslušných složek a následném sečtením násobků, tj.

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_p \cdot b_p.$$

Dva vektory, jejichž skalární součin je nula, nazýváme **ortogonálními** (kolmými) vektory. Tyto vektory spolu svírají pravý úhel.

Vektor je udáván pomocí složek. Z nich je možno spočítat velikost vektoru

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_p^2}.$$

Vektory můžeme využít i pro snadnější a přehlednější zápis soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1, \\ 2x - y + z &= 11, \\ -x + y + z &= 3. \end{aligned}$$

Tuto soustavu lineárních rovnic lze zapsat pomocí vektorů tak, že složky sloupcových vektorů jsou tvořeny koeficienty u příslušné neznámé v jednotlivých rovnicích

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 2

Spočtěte pro $\boldsymbol{u} = (4;\ -1;\ 4)$ a $\boldsymbol{v} = (5;\ -2;\ -2)$:

(i) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$

(ii) $\|\boldsymbol{u}\|$

(iii) $\|\boldsymbol{v}\|$

Řešení:

(i) Násobíme jednotlivé složky a pak sečteme

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 4 \cdot 5 + (-1) \cdot (-2) + 4 \cdot (-2) = 14$$

(ii) Počítáme podle vzorce normy

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{33}$$

(iii) Počítáme podle vzorce normy

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{33}$$

■

Lineární kombinace vektorů, lineární závislost a nezávislost

Mějme n vektorů $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$. **Lineární kombinací vektorů** $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ rozumíme vektor tvaru

$$\lambda_1 \cdot \boldsymbol{v_1} + \lambda_2 \cdot \boldsymbol{v_2} + \cdots + \lambda_n \cdot \boldsymbol{v_n},$$

kde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. **Triviální lineární kombinací** vektorů $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ rozumíme lineární kombinaci těchto vektorů, kde $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, tedy vektor ve tvaru

$$0 \cdot \boldsymbol{v_1} + 0 \cdot \boldsymbol{v_2} + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{v_n}.$$

Řekneme, že vektory $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ jsou lineárně nezávislé, pokud platí, že rovnost

$$\lambda_1 \cdot \boldsymbol{v_1} + \lambda_2 \cdot \boldsymbol{v_2} + \cdots + \lambda_n \cdot \boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{o}$$

je splněna pouze tehdy, jedná-li se o triviální lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$.

Dále řekneme, že vektory $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ jsou **lineárně závislé**, pokud nejsou lineárně nezávislé. To je ekvivalentní s tím, že existuje netriviální lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$, která je rovna nulovému vektoru.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 3

Zjistěte, zda vektor $\boldsymbol{u} = (-7;\, 16)$ lze vyjádřit jako lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{v_1} = (1;\, 2)$ a $\boldsymbol{v_2} = (3;\, -4)$.

Řešení: Snažíme se najít parametry λ_1, λ_2 splňující

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1 \cdot \boldsymbol{v_1} + \lambda_2 \cdot \boldsymbol{v_2}.$$

Pokud existují, platí, že $\boldsymbol{u}$ je lineární kombinací $\boldsymbol{v_1}$ a $\boldsymbol{v_2}$. Rovnici lze přepsat jako soustavu lineárních rovnic ve vektorovém tvaru

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \lambda_2.$$

To je soustava dvou rovnic o dvou neznámých, kterou umíme vyřešit

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 3\lambda_2 &= -7, \\ 2\lambda_1 - 4\lambda_2 &= 16. \end{aligned}$$

Od druhé rovnice odečteme dvojnásobek rovnice první

$$\begin{aligned} -10\lambda_2 &= 30, \\ \lambda_2 &= -3. \end{aligned}$$

Z $\lambda_1 + 3\lambda_2 = -7$ máme $\lambda_1 = -3\lambda_2 - 7 = 2$.

Platí tedy $\boldsymbol{u} = 2 \cdot \boldsymbol{v_1} - 3 \cdot \boldsymbol{v_2}$.

■

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 4

Ověřte lineární nezávislost pro $\boldsymbol{v_1} = (-1; 3; -5)$, $\boldsymbol{v_2} = (1; -1; -5)$, $\boldsymbol{v_3} = (-3; -2; 1)$.

Řešení: Hledáme parametry λ_1, λ_2, λ_3 takové, aby platilo

$$\lambda_1 \cdot \boldsymbol{v_1} + \lambda_2 \cdot \boldsymbol{v_2} + \lambda_3 \cdot \boldsymbol{v_3} = \mathbf{0}.$$

Řešíme tedy soustavu

$$\begin{aligned} -\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0, \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0, \\ -5\lambda_1 - 5\lambda_2 + \lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Sečtením prvních dvou rovnic dostaneme

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 - 5\lambda_3 &= 0, \\ \lambda_1 &= \frac{5\lambda_3}{2}. \end{aligned}$$

Dosadíme do první a třetí rovnice (mohli bychom dosadit i do druhé a třetí rovnice, musíme totiž využít všechny 3 rovnice) a máme

$$\begin{aligned} -\frac{5\lambda_3}{2} + \lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0, \\ -5\frac{5\lambda_3}{2} - 5\lambda_2 + \lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Obě rovnice vynásobíme dvěmi, abychom se zbavili zlomku:

$$\begin{aligned} -5\lambda_3 + 2\lambda_2 - 6\lambda_3 &= 0, \\ -25\lambda_3 - 10\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Můžeme dále upravit na

$$\begin{aligned} 2\lambda_2 &= 11\lambda_3, \\ 10\lambda_2 &= -23\lambda_3. \end{aligned}$$

Odečteme-li pětinásobek první rovnice od druhé máme

$$0 = -78\lambda_3.$$

Z toho je zjevné, že $\lambda_3 = 0$, pak ale i $\lambda_2 = 0$ a $\lambda_1 = 0$. Vektory jsou tedy lineárně nezávislé. ■

Vektorový prostor a vektorový podprostor

Vektorový prostor je množina vektorů taková, že obsahuje i všechny jejich lineární kombinace. Z toho vyplývá, že obsahuje nulový vektor a ke každému vektoru i vektor opačný. Báze vektorového prostoru V je množina vektorů z tohoto prostoru taková, že vektory v ní obsažené jsou navzájem lineárně nezávislé a každý vektor z prostoru V lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů báze. Jistým způsobem tedy báze definuje celý vektorový prostor V.

Množinou $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, rozumíme množinu všech uspořádaných n-tic reálných čísel. S operacemi sčítáním dvou vektorů a násobením konstantou tvoří vektorový prostor. Její pravé podmnožiny (viz kapitola o množinách) jsou vektorové podprostory, pokud splňují splňují podmínku vektorového prostoru.

Kanonický vektor je takový vektor, který má všechny své složky nulové kromě i-té, která je rovna jedné. Lze ho tedy zapsat takto

$$\boldsymbol{e_i} = (0, \ldots, 1, \ldots, 0),$$

kde jednička je vždy umístěna pouze na i-té pozici.

Nyní ukážeme, že skupina n kanonických vektorů je lineárně nezávislá. Mějme tedy vektory $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ \ldots, \boldsymbol{e_n}$. Lineární nezávislost dokážeme z definice tak, že ukážeme, že rovnost

$$\lambda_1 \cdot \boldsymbol{e_1} + \lambda_2 \cdot \boldsymbol{e_2} + \cdots + \lambda_n \cdot \boldsymbol{e_n} = \boldsymbol{o},$$

platí pouze tehdy, platí-li $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. První složka je pro všechny vektory z této skupiny nulová, kromě vektoru prvního, pro který je rovna jedné. Musí tedy platit

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 + \cdots + \lambda_n \cdot 0 &= 0, \\ \lambda_1 \cdot 1 &= 0, \\ \lambda_1 &= 0. \end{aligned}$$

Pro ostatní čísla $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ analogickým postupem dojdeme ke stejnému výsledku. Platí tedy: $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Jednoduše lze také ukázat, že jakýkoliv vektor z prostoru $\mathbb{R}^n$, lze vyjádřit pomocí lineární kombinace n kanonických vektorů $\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n}$. Mějme například $n = 4$ (pro jiné hodnoty n bychom postupovali analogicky). Chceme tedy ukázat, že vektor $\boldsymbol{u} = (u_1;\ u_2;\ u_3;\ u_4)$ lze vyjádřit jako lineární kombinace kanonických vektorů $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_4}$. Chceme tedy nalézt čísla λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 splňující následující rovnost

$$\lambda_1 \cdot \boldsymbol{e_1} + \lambda_2 \cdot \boldsymbol{e_2} + \lambda_3 \cdot \boldsymbol{e_3} + \lambda_4 \cdot \boldsymbol{e_4} = \boldsymbol{u}.$$

Aby tato rovnost platila, stačí zvolit čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ tak, že $\lambda_1 = u_1$, $\lambda_2 = u_2$, $\lambda_3 = u_3$, $\lambda_4 = u_4$

$$u_1 \cdot \boldsymbol{e_1} + u_2 \cdot \boldsymbol{e_2} + u_3 \cdot \boldsymbol{e_3} + u_4 \cdot \boldsymbol{e_4} = \boldsymbol{u}.$$

První složku vektoru $\boldsymbol{u}$ jsme si označili jako u_1. Kanonický vektor $\boldsymbol{e_1}$ má první složku rovnou jedné, kanonické vektory $\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{e_3}$, $\boldsymbol{e_4}$ mají první složku rovnou nule. Platí tedy

$$u_1 \cdot 1 + u_2 \cdot 0 + u_3 \cdot 0 + u_4 \cdot 0 = u_1$$

$$u_1 = u_1.$$

Analogicky lze ukázat, že rovnost platí i pro zbývající tři složky.

Dokázali jsme tedy, že pro skupinu vektorů $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, $\dots, \boldsymbol{e_n}$ platí, že jsou lineárně nezávislé a že jakýkoliv vektor z prostoru $\mathbb{R}^n$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci této skupiny vektorů. Jedná se tedy o bázi. Tuto bázi budeme nazývat kanonickou bází.

Lineárním obalem množiny vektorů je množina všech vektorů, které jsou jejich lineární kombinací. Lineárním obalem báze vektorového prostoru V by tedy byly všechny vektory z prostoru V.

ŘEŠENÝ PŘÍKLAD 5

Vyjádřete vektor $\boldsymbol{v} = (6;\, 7;\, -2;\, 0;\, 10;\, -1;\, 2)$ jako lineární kombinaci vektorů kanonické báze.

Řešení: Platí, že

$$\boldsymbol{v} = 6\boldsymbol{e_1} + 7\boldsymbol{e_2} - 2\boldsymbol{e_3} + 10\boldsymbol{e_5} - \boldsymbol{e_6} + 2\boldsymbol{e_7}.$$

■

Příklady k procvičení

3.1) Pro vektory $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{u}$ spočítejte $-\boldsymbol{u}$, $-8\boldsymbol{v}$, $\|\boldsymbol{v}\|$, $\|\boldsymbol{u}\|$, $\boldsymbol{v} - 3\boldsymbol{u}$, $\frac{\boldsymbol{v}}{2} + \boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$ pro

a) $\boldsymbol{u} = (2, -8, 4)$ a $\boldsymbol{v} = (1, 4, 2)$

b) $\boldsymbol{u} = (14, 0, 2, 8)$ a $\boldsymbol{v} = (7, 9, -6, -20)$

3.2) Ověřte lineární nezávislost vektorů

a) $\boldsymbol{v_1} = (0, 4, 8)$, $\boldsymbol{v_2} = (2, -3, -1)$ a $\boldsymbol{v_3} = (4, -4, 2)$

b) $\boldsymbol{v_1} = (3, 2, 12)$, $\boldsymbol{v_2} = (3, 4, 4)$ a $\boldsymbol{v_3} = (0, 1, 8)$

3.3) Vyjádřete následující vektory jako lineární kombinaci kanonických vektorů:

a) $\boldsymbol{v_1} = (2, -23, 0, 2, -9, 4)$

b) $\boldsymbol{v_2} = (0, -2, 3, 8, 2)$

c) $\boldsymbol{v_2} = (1, 9, 34, -87, 268)$

(Převzato: ISTOCK)