

NOVÁ INFINITNÍ MATEMATIKA

KAROLINUM



**I.
Velká iluze
matematiky
20. století**

PETR VOPĚNKA

Nová infinitní matematika
I. Velká iluze matematiky 20. století

Petr Vopěnka

Vydala Univerzita Karlova v Praze
Nakladatelství Karolinum
www.cupress.cuni.cz
Redakce Lenka Ščerbaničová
Obálka Jan Šerých
Sazba Šárka Voráčková
Vydání první

© Univerzita Karlova v Praze, 2015
© Petr Vopěnka – dědicové, 2015

ISBN 978-80-246-2987-2
ISBN 978-80-246-3221-6 (online : pdf)



Univerzita Karlova v Praze
Nakladatelství Karolinum 2016

www.karolinum.cz
ebooks@karolinum.cz

Obsah

Několik slov o obsahu a zpracování tohoto spisu

9

Teologické základy Cantorovy teorie množin

1. Potenciální a aktuální nekonečno	13
1.1 Aurelius Augustinus (354–430)	14
1.2 Tomáš Akvinský (1225–1274)	14
1.3 Giordano Bruno (1548–1600)	16
1.4 Galileo Galilei (1564–1654)	19
1.5 Odmítnutí aktuálního nekonečna	20
1.6 Infinitézimální počet	23
1.7 Magie čísel	24
1.8 Jean le Rond d’Alembert (1717–1783)	26
2. Disputace o nekonečnu v barokní Praze	29
2.1 Rodrigo de Arriaga (1592–1667)	29
2.2 Františkánská škola	34
3. Bernard Bolzano (1781–1848)	37
3.1 Pravda o sobě	37
3.2 Aktuálně nekonečné množství	39
3.3 Paradox nekonečna	41
3.4 Relační struktury na nekonečném množství	43
4. Georg Cantor (1845–1918)	45
4.1 Transfinitní ordinální čísla	45
4.2 Aktuální nekonečno	46
4.3 Odmítnutí Cantorovy teorie	47

Rozmach Cantorovy teorie množin

5. Základní pojmy Cantorovy teorie množin	57
5.1 Relace a funkce	60
5.2 Uspořádání	62
5.3 Dobrá uspořádání	63
6. Ordinalní čísla	67
7. Postuláty Cantorovy teorie množin	69
7.1 Kardinální čísla	70
7.2 Postulát potenční množiny	72
7.3 Postulát dobrého uspořádání	75
7.4 Námítky francouzských matematiků vůči Cantorovým postulátům	77
8. Velké mohutnosti	81
8.1 Počáteční ordinalní čísla	81
8.2 Zornovo lemma	83
9. Podněty usměrňující vývoj Cantorovy teorie množin	85
9.1 Kolonizace infinitní matematiky	85
9.2 Korpusy množin	89
9.3 Vstup matematického formalismu do teorie množin	90

Vrchol a pád

10. Ultrafiltry	97
11. Měřitelná kardinální čísla	99
12. Formalizace jazyka teorie množin	103
13. Ultraprodukt přes pokrývací strukturu	105
14. Rozmanitost oborů všech množin	109
14.1 Ultraextenze oboru všech množin	109
14.2 Operátor ultraextenze	111
14.3 Rozšíření působnosti operátoru ultraextenze	112
14.4 Množina všech přirozených čísel neexistuje	113
14.5 Rozšířitelné obory množin	114
14.6 Problém nekonečna	119
Summary	121
Seznam značení	123
Literatura	125

A řekli: „Nuže vybudujme si město a věž, jejíž vrchol bude v nebi. Tak si zajistíme, abychom nebyli rozptýleni po celé zemi.“ I sestoupil Hospodin, aby viděl město a věž, které budovali synové lidští. Řekl totiž Hospodin: „Hle jsou jeden lid a mají všichni jednu řeč. A toto je začátek jejich díla. Teď nebudou chtít ustoupit od ničeho, co si usmyslí provést. Nuže sestoupíme a zmateme tam jejich řeč, aby si vzájemně nerozuměli.“ I rozebral je Hospodin po celé zemi a upustili od budování města.

Gn 11, 4–8

Několik slov o obsahu a zpracování tohoto spisu

Podnět k napsání těchto čtyř (s Prolegomeny pěti) útlých knih o nové infinitní matematice vzešel od Miroslava Holečka, ředitele Ústavu nových technologií na Západočeské univerzitě v Plzni. V jím pořádaných teoretických seminářích pak moje práce na těchto knihách nacházela porozumění a podporu.

Z množství nejrůznějších poznatků týkajících se nové infinitní matematiky jsem k uveřejnění vybral následující čtyři tematické okruhy.

V knize *Velká iluze matematiky 20. století* je zdůvodněna a dokumentována nezbytnost vypracování nové infinitní matematiky. V knize *Nová teorie množin a polomnožin* je studováno nekonečno ukazující se na neostře vymezených množstvích. Kniha *Reálná čísla a jejich diskretizace* je věnována rozmístění nekonečně malých čísel na číselné ose a operacím prováděným s těmito čísly. Ve čtvrté knize *Staronový diferenciální počet*, jak samotný její název vypovídá, je obsažena úplná rehabilitace původního Leibnizova diferenciálního počtu. Aby tuto knihu bylo možno číst samostatně, jsou na jejím začátku uvedeny jen nezbytné pojmy a vlastnosti týkající se nekonečně malých čísel. Podobné zpracování integrálního počtu by si vyžádalo znalost některých dalších poznatků uvedených v předcházející třetí knize.

Bez obětavé pomoci mnohých mých kolegů a kolegů by tento spis jen stěží mohl vzniknout. Především Marie Větrovcová působící na katedře filozofie Západočeské univerzity zpracovala z mých rukopisů Prolegomena, druhou, třetí a čtvrtou knihu. Ondřej Chvojka opravil některé chyby v mých výpočtech obsažených ve čtvrté knize.

Mnoho věcných připomínek jsem obdržel od Aleny Vencovské působící na univerzitách ve Velké Británii. V neposlední řadě zajímavé (většinou do tohoto spisu nezařazené) podněty z fyziky mi poskytl Miroslav Holeček. Všem zde jmenovaným a mnoha dalším patří můj dík.

Petr Vopěnka

TEOLOGICKÉ ZÁKLADY
CANTOROVY TEORIE MNOŽIN

