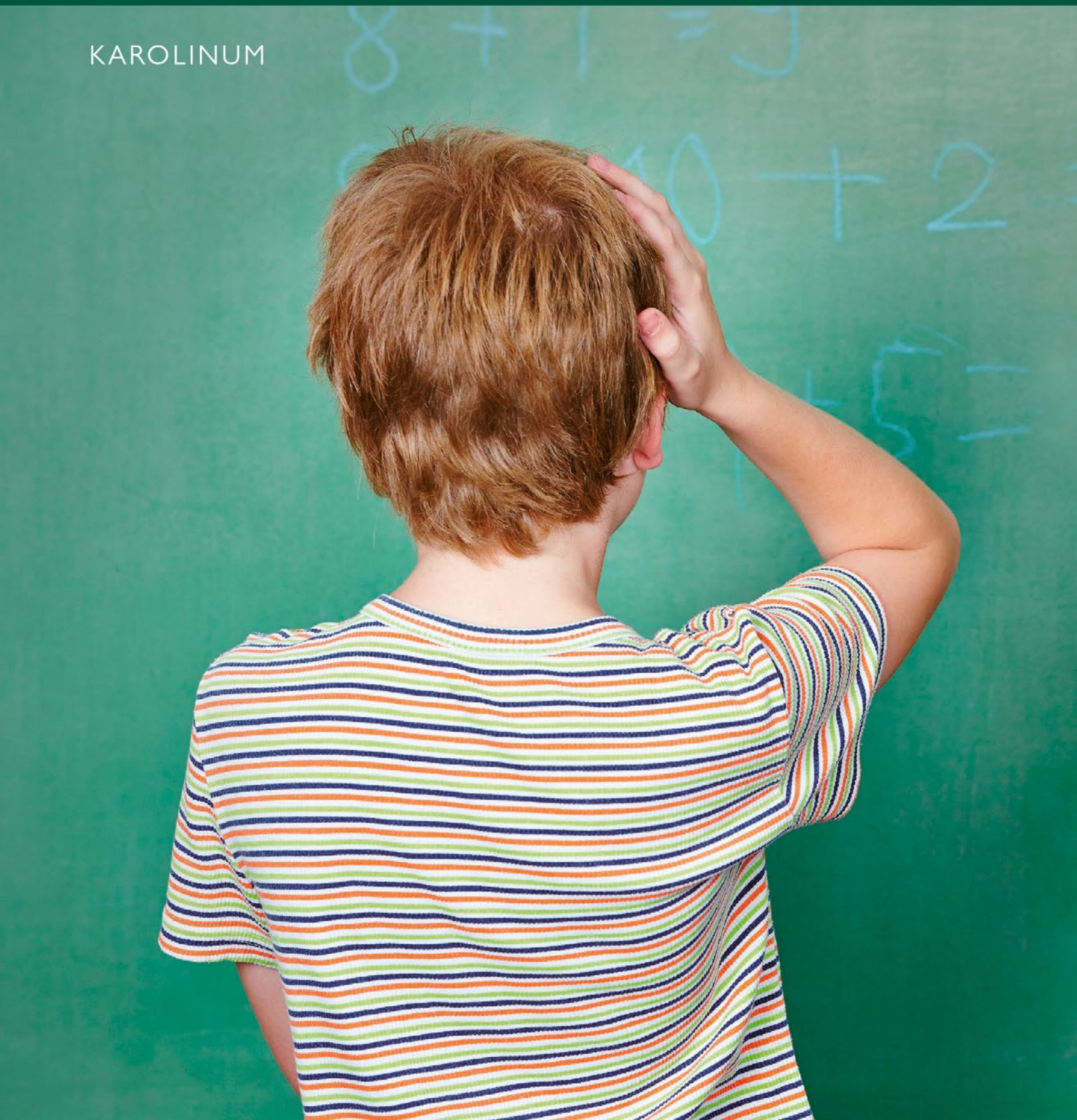
KRITICKÁ MÍSTA MATEMATIKY ZÁKLADNÍ ŠKOLY V ŘEŠENÍCH ŽÁKŮ

NAĎA VONDROVÁ, MIROSLAV RENDL A KOL.

KAROLINUM



Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků

Naďa Vondrová, Miroslav Rendl a kol.

Recenzovaly: doc. PaedDr. Jana Coufalová, CSc.
prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Vydala Univerzita Karlova,
Nakladatelství Karolinum
www.karolinum.cz
Grafická úprava Jan Šerých
Sazba DTP Nakladatelství Karolinum
Vydání první

Kniha vznikla v rámci projektu GAČR P407/11/1740,
Kritická místa matematiky na základní škole, analýza
didaktických praktik učitelů.

ISBN 978-80-246-3234-6
ISBN 978-80-246-3252-0 (online : pdf)

Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum 2017

www.karolinum.cz
ebooks@karolinum.cz

OBSAH

/1/ Vybraná kritická místa matematiky – zkoumání žákovských obtíží

Naďa Vondrová a Miroslav Rendl

Problematika výuky matematiky a výsledků našich žáků v matematice je v popředí zájmu nejen zainteresovaných odborníků již po řadu let. Přispívají k tomu i výsledky mezinárodních testování z matematiky, v nichž se ukazuje, že porozumění žáků matematickým pojmům není dobré. Diskutuje se o tom, jak tento stav změnit. Hovoří se o potřebě změnit způsob výuky, i když o povaze této změny nepanuje shoda. Jisté však je, že k nápravě situace neexistuje „královská cesta“ formou jednoduchých návodů. Do hry se dostává celá řada faktorů, počínaje žákem a jeho osobnostními a kognitivními charakteristikami, přes učitele a jeho styl výuky až po postoj veřejnosti k matematickému vzdělávání. Jisté také je, že je potřebné získávat co nejvíce informací o tom, v čem vlastně spočívá podstata problému. Existuje nějaká oblast (oblasti), v které mají žáci zejména obtíže? Dají se jejich obtíže odstranit lepším vysvětlováním nebo napsáním lepší učebnice? Laická veřejnost i někteří učitelé se domnívají, že stačí žáky více motivovat. Je tomu tak? Jaký typ motivace přináší pozitivní výsledky? Takových otázek si můžeme položit celou řadu. V této knize se snažíme poskytnout čtenáři hlubší pohled na jeden aspekt problematiky, a sice žákovské obtíže v oblastech, které jejich učitelé sami označili jako obtížné. Problematice jsme se věnovali i dříve. V hloubkových rozhovorech, jejichž výsledky jsou shrnuty v knize (Rendl, Vondrová a kol., 2013), se dotazovaní učitelé vyjadřovali nejen k tomu, jakým způsobem obtížím žáků didakticky čelí, ale také zmiňovali pravděpodobné příčiny těchto obtíží. Obtíže však popisovali spíše obecně, proto jsme se je rozhodli prozkoumat přímo s žáky.

1.1 TŘI ZDROJE VÝZKUMU PREZENTOVANÉHO V KAPITOLÁCH KNIHY

Předložená kniha do jisté míry sumarizuje výsledky získané v rámci projektu GA ČR *Kritická místa matematiky základní školy, analýza didaktických praktik učitelů* ze tří vzájemně provázaných oblastí.

Za prvé se jedná o sekundární analýzy výsledků mezinárodního srovnávacího výzkumu TIMSS 2007 z matematiky pro 8. ročník (Rendl, Vondrová, 2014) a analýzy obecných výsledků výzkumů TIMSS z jiných let a výzkumu PISA. Zejména na základě této analýzy jsme získali konkrétní poznatky o tom, jaké typy úloh jsou pro naše žáky obtížné.

Za druhé se jedná o výsledky realizace hloubkových rozhovorů se zkušenými učiteli základní školy, jejichž primárním cílem bylo zjistit, jaké oblasti matematiky základní školy považují pro naše žáky za tzv. kritické. Jde o oblasti, v nichž žáci často a opakovaně selhávají, jinak řečeno, které nezvládnou na takové úrovni, aby se jejich matematická gramotnost produktivně rozvíjela a aby mohla být tvořivě užívána v každodenním životě. Vycházeli jsme z toho, že zkušení učitelé matematiky a učitelé 1. stupně si za léta praxe vytvořili soubor didaktických praktik, které považují za účinné. Výsledky jsme shrnuli v monografii (Rendl, Vondrová a kol., 2013). Učitelé jako kritické identifikovali vesměs ty oblasti, které se jako kritické objevily i v mezinárodních srovnávacích výzkumech, ale také některé nové (např. konstrukční úlohy).

Za třetí jsme připravili a realizovali kvantitativní šetření formou online dotazníku pro učitele 1. stupně a učitele matematiky žáků nižších sekundárních škol. Jeho hlavním cílem bylo do jisté míry verifikovat zjištění z rozhovorů s učiteli. V první části dotazníku se učitelé měli vyjadřovat k různým výrokům[1] týkajícím se kritických oblastí matematiky na čtyřstupňové škále od „Určitě souhlasím“ až po „Určitě nesouhlasím“. Ve druhé části byly zařazeny otevřené otázky. Učitelé se měli vyjádřit ke konkrétním úlohám a napsat, jakých nejčastějších chyb se budou žáci daného věku pravděpodobně dopouštět. Zatímco první a druhá část byla odlišná pro učitele 1. stupně a učitele matematiky 2. stupně, poslední část dotazníku byla společná. V ní byly položeny otázky týkající se vlivu dílčích psychických a sociálních faktorů na úspěch v matematice (např. působení rodiny a školy, nadání, motivace, pocitu osobní kom-

1 Konkrétní výroky jsou uvedené u jednotlivých kapitol v knize.

petence žáka) a parametrů výuky (např. vztahu výuky k praktickému životu, způsobu prezentace látky, využívání domácích úkolů). Část otázek se týkala také rozdílů mezi dívkami a chlapci a s nimi spojených stereotypů (např. co se týče sebedůvěry v matematice, postojů k ní, nadání, píle). Učitelé se opět vyjadřovali na škálách postihujících míru souhlasu nebo příklonu k jednomu z faktorů tvořících bipolární škály.

Informace o dotazníku byla zaslána elektronicky na všechny základní školy a osmiletá gymnázia v České republice a dále o něm byli informováni konkrétní učitelé, s nimiž mají řešitelé projektu kontakt. Od června do září 2014 jsme získali cca 645 vyplněných dotazníků od učitelů 1. stupně a cca 280 od učitelů matematiky (viz tab. 1.1). Počet učitelů, kteří vyplnili jednotlivé položky dotazníku, kolísal od 570 do 645 v případě učitelů 1. stupně a od 248 do 280 v případě učitelů matematiky nižšího stupně sekundárního vzdělávání. Konkrétní počty jsou uvedeny v jednotlivých kapitolách u příslušných položek.

Tab. 1.1: Respondenti online dotazníku pro učitele 1. stupně a učitele matematiky[2]

	Učitelé 1. stupně	**Učitelé matematiky 2. stupně**
Aprobovaní učitelé	88 %	89 %
Délka praxe		
do 5 let	12 %	8 %
více než 5 let až 10 let	8 %	12 %
více než 10 let až 20 let	31 %	31 %
více než 20 let až 30 let	35 %	34 %
více než 30 let	15 %	16 %

Vyhodnocení dotazníku není předmětem této knihy, nicméně v jednotlivých kapitolách využíváme jeho dílčích výsledků jako další zdroj informací o tom, jak o zkoumaných tématech uvažují učitelé z hlediska porozumění žáků i svých didaktických přístupů. Na použitý dotazník se v kapitolách odkazujeme jako na „online dotazník“.

1.2 CÍL A METODY VÝZKUMU

Cílem výzkumu bylo identifikovat povahu obtíží, které mají čeští žáci 1. a 2. stupně v těch oblastech školské matematiky, které námi dotazovaní učitelé považují za kritické (viz oddíl 1.3.1).

Při zvažování vhodné metody výzkumu jsme brali v úvahu, že se musí jednat o výzkum kvalitativní, při němž se dozvíme od daného respondenta co

2 Součet není chybou zaokrouhlení 100 %. Skladba délky praxe je u obou stupňů škol pozoruhodně podobná.

nejvíce informací o jeho řešitelském procesu. Samotné písemné řešení žáka k tomu účelu nepostačuje, neboť neobsahuje jednoznačné informace o jednotlivých krocích postupu žáka, o míře jeho počátečního vhledu do úlohy, o zkusmých krocích, momentech, kdy nabyl vhledu do průběhu řešení, apod. Proto jsme se rozhodli pro hloubkové rozhovory,[3] v rámci nichž budou žáci řešit předložené úlohy a budou popisovat své myšlenkové pochody; využíváme tedy techniku myšlení nahlas, in-akční metodu verbalizace (Janík, 2005). Ve shodě s charakteristikou hloubkového rozhovoru v (Švaříček a kol., eds., 2007, s. 159) pomocí něj usilujeme o získání stejného pochopení jednání (v našem případě uvažování o matematice), jako mají žáci s obtížemi v matematice.

Hloubkové rozhovory s žáky nad řešeními úloh a úkolů nejen z matematiky se objevují i v českém pedagogickém výzkumu, i když ne příliš často. Např. V. Najvarová (2014) zkoumala rozvoj čtenářských dovedností u žáků 1. stupně. M. Tichá a A. Hošpesová (2005) na základě hloubkových rozhovorů usuzovaly na příčiny obtíží žáků 4. ročníku u řešení vybraných úloh TIMSS 1995. M. Krátká (2010) a J. Cihlář, P. Eisenmann a M. Krátká (2013) formou rozhovorů zjišťovali, jak žáci různého věku chápou pojem nekonečno. P. Eisenmann, J. Novotná a J. Přibyl (2015) použili metodu rozhovoru jako doplňkovou metodu při zjišťování, jak jsou žáci schopni používat jeden určitý typ heuristické strategie při řešení úloh. Podstatnou složkou jsou hloubkové rozhovory v dalších výzkumech (i když se neomezují jen na tuto techniku), např. (Hejný, 1995; Hejný, 2004).

Výše uvedený cíl konkretizujeme do dvou výzkumných otázek:

- Jaké obtíže vykazují žáci příslušného věku při řešení úloh ze zkoumaného tématu?
- Jaké jsou pravděpodobné příčiny těchto obtíží a nakolik odpovídají jevům popisovaným ve výzkumných studiích? Lze v případech shody usuzovat také na podobné příčiny, které jsou uváděny v odborné literatuře?

Předložená kniha sumarizuje společný výzkum, na němž se podíleli řešitelé projektu GAČR a který má společnou metodologii. Proto ji v této úvodní kapitole podrobněji uvedeme s tím, že kapitoly budou popisovat metodologii jen stručně (jen do té míry, aby tvořily samostatný celek, který je možné číst zvlášť) a doplní ji o další informace specifické pro dané téma. Z toho důvodu se v knize nemůžeme vyhnout jistému opakování informací.

3 Ve shodě s (Švaříček a kol., eds., 2007) budeme používat termín rozhovor, i když se často používá termín interview (Hendl, 2008).

1.3 METODOLOGIE

1.3.1 VÝBĚR TÉMAT A TVORBA ÚLOH

Na základě výsledků rozhovorů s učiteli (Rendl, Vondrová a kol., 2013) jsme vybrali témata pro rozhovory s žáky uvedená v tab. 1.2.

Tab. 1.2: Matematická témata vybraná pro výzkum s žáky

	1. stupeň ZŠ	**2. stupeň ZŠ**
Aritmetika	Slovní úlohy	Zlomky
Algebra		Algebraické modelování a úpravy algebraických výrazů
Geometrie	Konstrukční úlohy	
Geometrie		Míra v geometrii (obsah, objem)

Přirozeně nebylo v naší moci prozkoumat všechny oblasti, které se v rozhovorech s učiteli ukazovaly jako obtížné, museli jsme se omezit jen na některé z nich. Přitom jsme vycházeli také z výsledků mezinárodních srovnávacích studií. Např. učitelé obou stupňů škol v rozhovorech zmiňovali jako problematická desetinná čísla. Ovšem sekundární analýzou úloh TIMSS 2007 a úspěšnosti našich žáků v nich jsme zjistili (Rendl, Vondrová, 2014), že v šesti úlohách z domény Číslo, v nichž se pracuje s desetinnými čísly, mají naši žáci výsledky v průměru 20 % nad mezinárodním průměrem. Jen v pěti úlohách, v nichž jsou desetinná čísla užívána v kombinaci se zlomky, klesá odstup od mezinárodního průměru na český standard + 9 %. Takže žádná úloha s desetinnými čísly nepatří mezi námi vymezené slabé úlohy a ve výzkumu jsme se nadále soustředili spíše na problémy českých žáků se zlomky (v sadě pro 2. stupeň).

Slovní úlohy byly široce tematizované jako problematická oblast jak učiteli 1. stupně, tak učiteli 2. stupně. Nicméně v rozhovorech jsme je explicitně použili jako samostatnou sadu jen u 1. stupně. U 2. stupně jsou slovní úlohy součástí sad úloh pro zlomky (kap. 4), míru v geometrii (kap. 5) i algebru (kap. 6), kde jsou také vyvozeny patřičné závěry.

Učitelé matematiky se shodli na tom, že žáci mají výrazné problémy ve zjišťování obsahů útvarů a objemů těles. Tematizovali je v souvislosti s algebraickými výrazy a vůbec s uchopováním problémů kolem nás pomocí algebry. Stejné zjištění přinesla i zmiňovaná sekundární analýza TIMSS 2007. Proto se v rozhovorech s žáky podrobně věnujeme oběma oblastem.

Poslední oblastí, kterou jsme se zabývali, byla problematika konstrukčních úloh. Ta jediná se neobjevuje v mezinárodních srovnávacích výzkumech (protože tam žádné úlohy konstrukčního typu nejsou zařazovány), ani jí není věnována prakticky žádná výzkumná pozornost, a to ani v zahraničí. Učitelé obou stupňů škol však konstrukční úlohy jako problematické místo zmiňovali opakovaně a zdůrazňovali jejich důležitost v rámci školské geometrie. Proto jsme se rozhodli i tuto oblast s žáky prozkoumat.

Mezi řešiteli projektu GA ČR byly sestaveny týmy, které se věnovaly jednotlivým tématům. Vždy se jednalo o dva až čtyři řešitele, kteří spolupracovali na jednotlivých stadiích výzkumu (přípravě úloh, sběru dat i jejich vyhodnocení). Podrobněji je celý proces popsán u jednotlivých kapitol.

Na základě tří zdrojů informací (od dotazovaných učitelů v našem předchozím výzkumu, z výsledků mezinárodních srovnávacích studií v matematice, ze souvisejícího, zejména zahraničního výzkumu pro dané matematické téma) jsme stanovili, jaké jevy jsou pro naše žáky v daném tématu pravděpodobně obtížné, a na jejich základě jsme pak formulovali konkrétní úlohy. Tyto jevy jsou přirozeně poplatné danému tématu, proto se k nim vyjadřují autoři v příslušných oddílech kapitol. Jako zdroj úloh jsme použili mj. učebnice a uvolněné úlohy z mezinárodních srovnávacích výzkumů. Úlohy jsme vybírali tak, aby testovaly to učivo, které je součástí Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání (RVP pro ZV), nešlo nám tedy o úlohy nestandardní. Některé úlohy je možné považovat přímo za typicky školské, jiné spíše za aplikační. Úlohy jsou uvedeny v jednotlivých kapitolách spolu s didaktickým komentářem. Většina z nich je shrnuta i v přílohách 9.1–9.4, kde jsou uvedeny i výsledky a naznačeny možné způsoby řešení.

Úlohy jsme vybírali v širším týmu sestávajícím z řešitelů grantového projektu GA ČR a před vlastním použitím jsme je pilotovali s menší skupinou žáků. Po pilotáži docházelo k úpravě zadání či v některých případech k zásadnějšímu přepracování a nové pilotáži[4]. Úlohy byly určeny vždy pro danou věkovou skupinu žáků, u témat určených 2. stupni se (až na výjimky) jednalo o stejnou sadu úloh pro celé rozpětí 2. stupně. Konkrétně je to vždy uvedeno u každé kapitoly.

1.3.2 ZAŠKOLENÍ TAZATELŮ

Po výběru úloh byl sestaven tým tazatelů pro jednotlivé sady úloh. Ten sestával z řešitelů projektu GA ČR (autorů knihy), ale také ze zaškolených spolupracovníků: studentů v doktorském studiu oboru didaktika matematiky a studentů magisterského studia učitelství matematiky a 1. stupně. Tazatelé byli příslušným řešitelským týmem, který měl téma na starosti, proškoleni z hlediska cíle dotazování (jaké jevy se snažíme postihnout), jeho průběhu, vedení rozhovoru s žákem, jeho zaznamenávání apod. Pokyny pro tazatele zdůrazňovaly nutnost navození klimatu, v němž vystupuje do popředí zájem tazatele o to, jak

4 Jako např. u míry v geometrii pro 2. stupeň: sada úloh určená původně pro 8. a 9. ročník se ukázala jako příliš obtížná a jako základ byla použita původní sada úloh určená pro 6. a 7. ročník.

žák úlohu řeší, jak uvažuje, jakou subjektivní logiku má jeho postup. Tazatelé měli poskytnout žákovi volnost v postupu bez zbytečného zasahování a přerušování. Pokud by žák postupoval samostatně, měli se až následně ptát, jak postupoval a proč. V případě, že žák postupoval chybně nebo si nevěděl rady, měli tazatelé poskytovat zprvu co nejmenší nutnou dopomoc a postupně ji stupňovat tak, aby žák pokud možno dospěl k řešení. Odstupňování dopomoci umožňovalo přesněji analyzovat, jaká je povaha potíží a z čeho pramení žákovo neporozumění.

Tazatelé se dozvěděli, jaké charakteristiky mají jednotlivé úlohy a jakou dopomoc mohou žákům poskytnout. Někdy byla tato dopomoc jen obecná (ve smyslu „nechte žáka text ještě jednou přečíst“, „zeptejte se na to, kterému slovu nerozumí“, „požádejte ho, aby si situaci nakreslil“), jindy specifická (formou konkrétních nápověd k dané úloze – to je uvedeno přímo u příslušných kapitol). Hlavním cílem bylo zjistit, jak žáci uvažují nad danou úlohu, jak ji řeší, co jim působí problémy a jaká dopomoc jim pomohla tyto problémy překonat. Cílem zaškolení tazatelů bylo zajistit srovnatelné podmínky všem žákům, kteří se budou účastnit rozhovorů na stejné téma, protože jednomu tématu se věnovalo více tazatelů. Na druhé straně ovšem už z povahy věci nebylo možné dát tazatelům přesné pořadí otázek či různých druhů dopomocí. Úvahy žáků se ubírají různými směry a primární pro nás bylo, abychom postihli jejich vlastní myšlenkové pochody, bez velkého ovlivňování tazatelem.

1.3.3 VÝBĚR ŽÁKŮ

Jak již bylo řečeno, cílem výzkumu bylo identifikovat obtíže žáků při řešení úloh v dané oblasti. Proto bylo naším záměrem vybírat pro rozhovory spíše žáky průměrné, u nichž lze problémy očekávat, ale na druhé straně komunikativní, kteří se nebudou obávat o svých obtížích hovořit a popisovat své myšlenkové pochody. Vybráni měli být žáci, kteří již testovanou problematiku v hodinách matematiky probírali. Původně jsme chtěli vybírat pouze žáky s průměrnou známkou z matematiky 2, 3 a 4. Z důvodu omezení vlivu dalších interferujících proměnných jsme plánovali oslovit žáky, jejichž rodný jazyk je čeština, a současně žáky, kteří nemají nějakou poruchu učení ovlivňující výrazně jejich schopnost naučit se matematiku. Jednalo se tedy do jisté míry o předem danou strukturu výběru (Hendl, 2008), co se týče předpokládaných znalostí žáků.

S žádostí o umožnění hloubkových rozhovorů s žáky jsme se primárně obrátili na školy, s nimiž Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy v Praze spolupracuje. Vybírali jsme spíše běžné základní školy, bez speciálního zaměření. Na další školy se obrátili přímo tazatelé. Výběrový soubor byl tedy získán dostupným výběrem.

Při konkrétním výběru žáků se ukázalo, že učitelé se někdy zdráhali volit pro výzkum žáky s horší známkou z matematiky. Vyjadřovali obavy, že žák nebude schopen vyřešit nic a tazatel od něj žádné relevantní informace nedostane. Po předběžné analýze rozhovorů s několika žáky základní školy,[5] kteří měli z matematiky známku 1, jsme zjistili, že i oni vykazují mnohé z obtíží, které jsme plánovali zkoumat. Proto jsme nakonec akceptovali i část žáků s výbornou známkou z matematiky, přičemž jsme však dbali o to, aby netvořili významné procento zkoumaných žáků. Z výše řečeného je zřejmé, že výběr žáků není reprezentativní. To však v případě výzkumu zaměřeného na identifikaci rejstříku obtíží žáků v daných oblastech není zásadní. Z našeho hlediska je důležité, že se jedná o žáky spíše průměrné, u nichž je předpoklad, že budou vykazovat obtíže srovnatelné s obtížemi žáků daného věku a zkušeností. Tedy jejich výběr není zatížen žádnou systematickou chybou.

Základní přehled o žácích, kteří se zúčastnili výzkumu, podává tab. 1.3 a 1.4. Pro žáky 2. stupně je důležitou informací i známka z matematiky. To značí známku, kterou uvedl žák jako svou poslední známku z matematiky na vysvědčení, případně průměrnou známku za několik posledních let. Pokud se žák charakterizoval známkou mezi dvěma známkami, pak jsme se pro účely prezentace výsledků přiklonili k lepší známce. Informace o známce z matematiky podávají tabulky v příslušných kapitolách a dále podrobnější tabulky v příloze 9.5, kde jsou navíc informace o škole a tazateli a také o tom, jakého průměrného výsledku žák dosáhl při řešení našich úloh. Další informace o konkrétních účastnících výzkumu podávají příslušné kapitoly.

Tab. 1.3: Přehled žáků 1. stupně účastnících se výzkumu

Ročník	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Celkem**
Slovní úlohy*	20	20	23	21	16	100
Konstrukční úlohy				2	13**	15

* Slovní úlohy pro příslušný ročník byly předkládány vždy žákům s ukončeným příslušným ročníkem. Tedy sada úloh pro 1. ročník byla předložena žákům na počátku 2. ročníku. Žáky zde zařazujeme do ročníků podle použité sady úloh.
** Se třemi z těchto žáků byly rozhovory prováděny v září na počátku 6. ročníku.

Tab. 1.4: Přehled žáků 2. stupně účastnících se výzkumu

Ročník	**6**	**7**	**8**	**9**	**Celkem**
Zlomky		4	9	8	21
Konstrukční úlohy			12	10	22
Míra v geometrii		2	3	16*	21
Algebraizace a úpravy algebraických výrazů	1	7	8	21	37

* S pěti z těchto žáků byly rozhovory prováděny v září na počátku 1. ročníku střední školy.

5 Konkrétně v tématu míra v geometrii pro 2. stupeň.

1.3.4 SBĚR DAT

Hloubkové rozhovory probíhaly přímo na jednotlivých základních školách. Žáci byli uvolněni z hodin matematiky či z hodin jiného předmětu, v několika málo případech se výzkumu účastnili po vyučování. Rozhovory byly individuální, za přítomnosti tazatele a jednoho žáka. Jejich průběh byl nahráván na videokameru tak, že kamera zabírala papír, na který žák psal, jeho ruce a gestikulaci a zaznamenávala zvuk. Žáci byli ujištěni, že se jejich obličej na kameře neobjeví a že při prezentaci výsledků se nikde neobjeví jejich pravá jména ani konkrétní škola, kterou navštěvují.[6] Bylo jim sděleno, že účelem rozhovorů s nimi je získat informace o obtížích, které žáci zpravidla v daných tématech mají, s cílem připravit didaktická doporučení pro učitele. Byli také seznámeni s tím, že tazatelé nebudou o průběhu rozhovoru ani o řešeních žáků informovat jejich učitele.

Úlohy byly zadávány tazateli jedna po druhé zpravidla na volných listech papíru. Žáci si je měli přečíst, v případě neporozumění zadání se mohli zeptat. Podle povahy tématu, kterému se věnovali, měli k dispozici konstrukční pomůcky, kalkulačku či tabulky vzorců.

Rozhovory trvaly od 30 do 120 minut, podle povahy tématu. Obecně platilo, že rozhovory s žáky 2. stupně byly delší, což bylo dáno jednak povahou úloh (byly komplexnější), jednak tím, že starší žáci jsou schopni udržet pozornost delší dobu. Konkrétní informace o průběhu rozhovorů jsou u jednotlivých kapitol. Zde jen uvedeme, že žáci byli v průběhu rozhovoru vesměs uvolnění a bez zábran odpovídali na otázky tazatelů a snažili se vysvětlit, jak uvažují. I ti žáci, kteří vyjadřovali na začátku rozhovoru obavy ze selhání, se v průběhu řešení (zpravidla) snazších počátečních úloh postupně uklidnili. Tazatelé jim připomněli cíl výzkumu a snažili se navodit klidné prostředí, v němž se žáci mohou o své myšlenky podělit. Z videozáznamů je patrné, že žáci se rozhovory necítili nijak ohroženi. Získaná data tak považujeme z hlediska jejich výpovědní hodnoty za validní.

Jak bylo uvedeno v oddíle 1.3.2, tazatelé byli před vlastními rozhovory zaškoleni. Povahou hloubkových rozhovorů je však jejich nepředvídatelnost. Tazatelé se dostávali do různých situací, na které jsme je nemohli připravit, a museli na ně na místě reagovat. Žák např. navrhl netradiční řešení nebo položil otázku, na kterou nebyli tazatelé předem připraveni. Tazatelé se také lišili v tom, jak dlouho zkoušeli žákům pomáhat, než přešli k jiné úloze či než žáky k řešení dovedli přímou nápovědou. Někteří ne vždy dodrželi pokyny v tom, aby nespěchali, předčasně nenapovídali a nebránili žákovi v chybných řešeních. To záviselo zejména na tom, jak dlouho už rozhovor trval, jak žák na dopomoci reagoval a do jaké míry se chtěl danou úlohou zabývat. Někdy

6 V přílohách 9.5.1–9.5.7 používáme pro školy obecná označení místa tak, aby bylo jasné, kde se škola zhruba nachází, ale aby nebyla přímo identifikovatelná. Pro žáky používáme pseudonymy.

by respektování našich pravidel vedlo k neúměrnému protahování rozhovorů. Z toho plyne, že vedení rozhovorů nemohlo být z podstaty věci u všech tazatelů stejné. Vzali jsme to v úvahu při analýze dat, pokud to nějak viditelně ovlivnilo žákovo řešení.[7] Poznámky o těchto případech jsou v jednotlivých kapitolách tam, kde prezentujeme přímo ukázky z rozhovorů.

1.3.5 ANALÝZA DAT

Výzkumná data zahrnují videozáznamy rozhovorů, terénní zápisky tazatelů a kopie žákovských řešení. Videozáznamy všech rozhovorů byly přepsány do doslovných protokolů a ty byly doplněny o části naskenovaných řešení žáků tam, kde se žáci k tomuto řešení vyjadřují. Takto upravené protokoly byly vloženy do programu Atlas.ti, kde byly propojeny s příslušným videozáznamem. To spolu s vloženými obrázky žákovských řešení významně usnadnilo pracné kódování dat. Přesto jsme se při analýze dat opakovaně vraceli i k videozáznamům a doplňovali relevantní informace pro pochopení uvažování žáků.

Na kódování sady transkriptů příslušných ke stejnému tématu vždy spolupracoval dílčí tým dvou až čtyř řešitelů (v případě rozhovorů o míře v geometrii pro 2. stupeň se jednalo též o doktorandy oboru didaktika matematiky). Nejdříve bylo provedeno předběžné kódování, kdy byly jednotlivými řešiteli zakódovány ty části transkriptů, v nichž žáci řešili jednotlivé úlohy. Věnovali jsme pozornost jevům, které byly charakteristické pro danou úlohu (na jejichž základě jsme vlastně danou úlohu do výzkumu zahrnuli), a pak nápadným či nějak zajímavým jevům. V této fázi jsme se snažili pracovat spíše do šířky, abychom nezanedbali některé potenciálně důležité aspekty práce žáků. Lze tedy říci, že jsme použili některé techniky zakotvené teorie (Strauss, Corbinová, 1999).

Poté byla hledána shoda mezi řešiteli a vytvořen prvotní kategoriální systém. Tento postup byl podle potřeby několikrát opakován a kategoriální systém byl měněn tak dlouho, až na něm bylo dosaženo shody. Následně se analýzy identifikovaných tematických oblastí ujali jednotliví členové týmu, resp. jejich dvojice. Ti dále přizpůsobovali kategoriální systém v souladu s prohlubujícím se vhledem do obsahových souvislostí dat a s nově se vynořujícími otázkami. Současně se snažili vytvářet shrnující kategorie, které naopak bohatost identifikovaných jevů omezují a tyto jevy organizují (ve smyslu axiálního kódování zakotvené teorie). Právě tyto kategorie tvoří podstatu prezentovaných výsledků v jednotlivých kapitolách.

7 V jednom případě došlo k tomu, že byly rozhovory znehodnoceny. Rozhovory, které vedla jedna z tazatelek u tématu míra v geometrii pro 2. stupeň, jsme museli z výzkumu zcela vyloučit. Tazatelka žáky příliš naváděla na řešení a v podstatě jim je v některých případech diktovala po krocích.

Je přirozené, že i přes snahu tazatelů dopátrat se smyslu žákova způsobu řešení či některého jeho kroku se musíme při analýze dat dopouštět i mnohých interpretací. Někde si tazatel při vlastním rozhovoru nejasnost vůbec neuvědomil (tedy se dále neptal) a ta vyšla najevo až při analýze dat. Nebo tazatel teprve dodatečně zjistil, že některý krok žáka špatně pochopil. V takovém případě jsme se snažili triangulovat svou interpretaci oproti dalším částem protokolu, což bylo někdy možné díky tomu, že podobné jevy se u daného žáka vyskytovaly v řešení více úloh tematické sady. Při prezentaci výsledků v jednotlivých kapitolách vyjadřujeme i míru jistoty, s jakou můžeme tvrzení vyslovit.

Je zřejmé, že jevů, které se mohly projevit v žákovských řešeních (a také projevily) i u takto poměrně malého počtu respondentů, je nepřeberně. Proto jsme se při výběru výsledků, které prezentujeme v této knize, museli omezit na ty, které byly nejvíce vypovídající, osvětlující, zajímavé, potvrzující naše předpoklady (nebo naopak jdoucí proti těmto předpokladům) a výsledky předchozích výzkumů apod. U každé kapitoly uvádíme, jak výsledky kategorizujeme a proč, případně jak by bylo možné v interpretaci výsledků pokračovat.

1.4 ZPRACOVÁNÍ A STRUKTURA KNIHY

Jednotlivé kapitoly mají sice své konkrétní autory, nicméně, jak již bylo řečeno, na přípravě úloh, organizaci sběru dat a jejich analýze se podílela vždy širší skupina sestávající z řešitelů projektu a doktorandů. Kromě toho si členové týmu vzájemně četli své texty a poskytovali si řadu připomínek a podnětů, o kterých pak diskutovali. Také z tohoto důvodu jsme se v knize přiklonili k užívání autorského plurálu, a to i v případě autorek žen. Také termín „žáci“ používáme ve významu generického maskulina, tedy jako souhrnný pro chlapce i dívky. Podobně to platí pro termíny „tazatelé“ a „učitelé“. Hovoříme-li o žácích 2. stupně základní školy, máme tím na mysli i žáky nižšího stupně gymnázia (pokud neuvedeme jinak). Všichni žáci jsou v knize uvedeni pseudonymem, přičemž každý zúčastněný žák má individuální pseudonym (žádné jméno není použito dvakrát). Pseudonym odpovídá genderu. Tazatelé nejsou uvedeni jmenovitě, ale v tabulkách v příloze 9.5 je uvedeno, který tazatel vedl rozhovor s kterým žákem.

Velmi významnou část knihy tvoří úryvky z rozhovorů s žáky, které ilustrují a vysvětlují identifikované jevy, jimž se věnujeme. Jedná se o téměř doslovné přepisy, přirozeně tedy obsahují nešikovné formulace a nespisovné výrazy. Ovšem z důvodu přehlednosti používáme číslice a matematické značky místo slovního popisu. Např. „$x + 5 = y^2$“ místo dlouhého a nepřehledného „iks plus pět rovná se ypsilon na druhou“. Podobně nakládáme s písmeny označujícími body a přímky (tedy „přímka *AB*“ místo „přímka á bé“). Tam, kde je to nutné, k přepisům dodáváme vysvětlující poznámky v kulatých závorkách přímo v textu, případně v poznámkách pod čarou.

Pro zápis úryvků z rozhovorů používáme další pravidla. Promluvy nečíslujeme. Tazatelova promluva je uvedena písmenem T, zatímco promluva žáka je uvedena jeho celým pseudonymem. Úryvky jsou tak přehlednější, protože je vizuálně odlišeno, co říkají žáci. Hranaté závorky označují místa rozhovoru, kde je jejich část vynechána. Pokud nastává v řeči odmlka, naznačují to tři tečky. Délku odmlky zpravidla přesně nespecifikujeme, úryvky by byly nečtivé. Tam, kde je to nutné, vyjadřujeme délku odmlky jinak (např. „dlouho přemýšlí"). Přitakávací responzní zvuk označujeme „hmm" (nebo slovem „přitakává"), zatímco neutrální zvuk zapisujeme jako „hm".

Počet žáků, kteří se zúčastnili našich rozhovorů, pochopitelně snižuje výpovědní hodnotu případných kvantifikací. Nicméně považujeme za důležité, aby bylo zřejmé, zda se identifikovaný jev objevil spíše ojediněle nebo zda v našem výzkumném vzorku převažoval. Proto často uvádíme i počty žáků, u nichž k jevu došlo. Nelze je však brát absolutně jako reprezentativní ukazatel četnosti jevu u všech žáků stejného věku.

Knihu otevírá kap. 2, která se věnuje slovním úlohám na 1. stupni základní školy. Je poměrně rozsáhlá, neboť cílovou skupinou jsou všechny ročníky 1. stupně. Důvodem je fakt, že slovní úlohy považujeme i vzhledem k tomu, co bylo uvedeno již v oddíle 1.3.1, za klíčové téma matematiky základní školy. Charakteristickým rysem zejména této kapitoly je, že zahrnuje jak hluboký pohled psychologický, tak pohled didakticko-matematický. Kap. 3 o konstrukčních úlohách představuje most k matematickým tématům 2. stupně, protože se věnuje žákům obou stupňů škol. Následující kapitoly jsou uspořádány podle vzrůstajícího stupně abstrakce zkoumaného tématu. Zatímco kap. 4 se věnuje číslům, konkrétně zlomkům u žáků 2. stupně, kap. 5 se týká míry v geometrii (obsahům a objemům), kde kromě číselného vyjádření míry hrají důležitou roli proměnné (ve vzorcích). Knihu tak přirozeně završuje kap. 6 komplexně pojednávající jak o algebraizaci (tedy uchopení slovně popsané situace pomocí písmen), tak o úpravách algebraických výrazů. Algebra představuje v kontextu matematiky základní školy nejvyšší stupeň abstrakce.

Kapitoly 2 až 6 mají jednotnou strukturu.[8] Nejdříve je uveden teoretický rámec, v rámci kterého jsou dané rozhovory realizovány a vyhodnoceny. Na něj navazují vybrané výzkumy naše i zahraniční, které mají ke zkoumanému tématu úzký vztah. Přirozeně jsme se museli velmi omezovat ve výběru, protože každé z námi nabízených témat (až na téma konstrukční úlohy) je v odborné komunitě didaktiků matematiky (a často i psychologů) široce rozpracováno. Obecně lze říci, že jsme vynechávali výzkumy, které se týkají výuky daného tématu, tedy např. výzkumy typu experimentální versus kontrolní skupina ověřující účinnost určitého způsobu výuky.[9] Vybírali jsme spí-

8 Ovšem mají i svá specifika, tedy tato struktura je v jednotlivých kapitolách vědomě modifikována podle potřeb autorů.

9 Další související výzkumy lze nalézt v naší předchozí knize týkající se rozhovorů s učiteli (Rendl, Vondrová a kol., 2013).

še výzkumy (a to jak z didaktiky matematiky, tak psychologie), jež se věnují přímo žákům a jejich myšlenkovým procesům při řešení takového typu úloh, které se svou strukturou, kontextem apod. podobají úlohám využitým v našich rozhovorech.[10]

Cenným zdrojem výzkumně podložených informací byly pro nás zprávy amerického National Mathematics Advisory Panel (NMAP), a to zejména Finální zpráva (NMAP, 2008) a zprávy pracovních skupin o konceptuálních znalostech a dovednostech (Fennell et al., 2008) a o procesech učení (Geary et al., 2008). NMAP, který byl zřízen prezidentským nařízením v dubnu 2006, zpracoval rešerši více než 16 tisíc výzkumných publikací a výsledky rozsáhlého šetření, jehož se zúčastnily stovky amerických aktivních učitelů matematiky.[11] Pro zpracování závěrů byly podle vyjádření autorů brány v úvahu jen takové výzkumné studie, které splňovaly předem stanovená kritéria „nejlepších dostupných vědeckých důkazů" („best available scientific evidence"). Zprávy NMAP tak představují kvalitní přehled odborné literatury v mnoha oblastech, které jsou pro náš výzkum relevantní.

Ve třetí části se kapitoly zabývají českým vzdělávacím kontextem. Za prvé dané téma popisují vzhledem k českému kurikulu (zpravidla RVP pro ZV, případně i školním vzdělávacím programům, tedy ŠVP). Za druhé shrnují, jak dané téma vidí čeští učitelé. Zde vycházíme z našich rozhovorů s učiteli (Rendl, Vondrová a kol., 2013) a z online dotazníku pro učitele (viz oddíl 1.1). V této části jsou také představeny některé obtíže, které mají čeští žáci v daném tématu, a to prostřednictvím sekundární analýzy mezinárodních srovnávacích výzkumů a domácích testování (pokud jsou k dispozici).

V další části kapitoly stručně představují metodologii a konkretizují obecné informace uvedené v oddíle 1.3. Zejména jsou zde popsány úlohy,[12] které jsou v rozhovorech použity, a podán základní přehled o účastnících.

Jádro kapitol tvoří výsledková část. Nejdříve jsou prezentovány souhrnné výsledky, z nichž je vidět, jaké úlohy činily žákům největší problémy. Za nimi následuje popis jevů, které jsme v řešeních a promluvách žáků identifikovali a které jsme sdružili do souhrnných kategorií. Oproti zvyklostem při psaní odborných článků jsme se přiklonili k tomu, že tyto kategorie výsledků diskutujeme v kontextu souvisejících výzkumů zpravidla hned po jejich prezentaci, tedy nečekáme až na závěrečnou diskusi. Důvodem je fakt, že souhrnná diskuse by byla vzhledem k heterogenitě identifikovaných kategorií velmi komplexní a nepřehledná. Tři z kapitol (3, 4 a 6) navíc nabízejí souhrnnou diskusi.

---

10 Tyto související výzkumy tvoří jedno z východisek našich rozhovorů a současně jsou využity v části diskutující výsledky, k nimž jsme došli.

11 Kromě toho zpracoval množství zpráv o edukační politice a vyžádal si také speciální zprávy a komentáře od řady expertů a institucí.

12 Některé z úloh jsou s dalšími informacemi uvedeny v přílohách, kde jsou také další informace o účastnících výzkumu.

Všechny kapitoly mají závěr, který stručně shrnuje žákovské obtíže v dané oblasti a nabízí některé didaktické důsledky. Důraz na tyto důsledky se v jednotlivých kapitolách liší v závislosti na odborném zaměření jejich autorů. Poslední, sedmá kapitola shrnuje ty obtíže žáků, které se objevily ve více zkoumaných tématech, a o nichž je tedy možné uvažovat obecněji.

1.5 OMEZENÍ VÝZKUMU

Náš výzkum má přirozeně řadu omezení, která shrneme na tomto místě, abychom je nemuseli opakovat u každé kapitoly.

Hlavním omezením je menší počet žáků a jejich výběr, tedy fakt, že se jedná o žáky spíše v matematice průměrné. Vzhledem k povaze našich cílů to však nepovažujeme za problematické. U velkého počtu žáků bychom nedokázali jít do takové hloubky. Je možné si představit, že některé vybrané námi identifikované jevy lze ověřit na šířeji koncipovaném výzkumu. Přitom je však třeba pečlivě vážit, jaké informace se dají vyčíst z písemného řešení bez možnosti okamžitého rozhovoru s žákem.

Dalším možným omezením výzkumu je způsob kódování dat. Již z popisu v oddíle 1.3.5 je zřejmé, že jsme museli řadu potenciálně zajímavých jevů vynechat, a je možné, že kdyby kódování prováděl někdo jiný, dával by důraz na jiné jevy. To se konečně projevilo i při spolupráci didaktiků matematiky a psychologů, kdy bylo třeba si vyjasnit, co vlastně je hodné našeho společného zřetele. To však je podstatou všech kvalitativních výzkumů podobného typu. Jisté je, že datový soubor je k dispozici k dalším analýzám. Např. by bylo možné věnovat větší pozornost roli tazatele a způsobům jeho dopomoci (Jaká dopomoc byla účinná? Jak ovlivňovaly reakci žáka na různé způsoby dopomoci osobnostní charakteristiky žáků? apod.). Dodejme, že některé z těchto záležitostí budou součástí prakticky zaměřené publikace pro učitele, která shrne některé žákovské obtíže ve zkoumaných oblastech a nabídne učitelům didaktická doporučení.

S výše řečeným souvisí, že se v analýzách zabýváme vesměs jen obtížemi žáků v daném tématu. Mohl by vzniknout dojem, že tím hovoříme o celé populaci žáků dané věkové skupiny. Tak tomu však přirozeně není. Faktem je, že upozorňujeme na ta místa, která se opakovaně ukazují jako obtížná a problematická (viz oddíl 1.3.1) u podstatné části českých dětí. Příčiny obtížnosti lze spatřovat ve vzájemné kombinaci faktorů, z nichž jen některé můžeme ovlivnit: povaha učiva samotného (např. jeho abstraktnost), osobnostní a kognitivní charakteristiky žáků, didaktické příčiny.

Konečně prezentace výsledků v jednotlivých kapitolách není a ani nemůže být „objektivní“. Už tím, jakému jevu se autoři rozhodli věnovat a jak ho prezentují (např. jaké úryvky z rozhovorů s žáky používají jako ilustrativní), výsledky subjektivizují a předkládají čtenáři svůj pohled na problematiku.

Opět se tomu nedá vyhnout, zdůrazníme však, že jsme se snažili vždy důsledně vycházet z dat, která jsme nasbírali, a pokud se dopouštíme interpretací jdoucích za tato data, v textu na to upozorňujeme.

1.6 SHRNUTÍ

Podobně jako u předchozí knihy (Rendl, Vondrová a kol., 2013) se domníváme, že předložená kniha je cenná mj. tím, že její kapitoly vycházejí ze stejných výzkumných otázek a jsou založeny na stejné metodologii. Každá kapitola se sice týká jiné oblasti matematiky, ale popisujeme ji prizmatem žáků a jejich obtíží. Další významnou charakteristikou je fakt, že autorský kolektiv zahrnuje jak badatele v oblasti didaktiky matematiky, tak v oblasti psychologie. To se projevilo nutností sladit poměrně odlišné zorné úhly pohledu obou skupin, a tak snad přispět k propojování obou do jisté míry oddělených komunit.

Závěrem konstatujeme, že i když není výběr žáků reprezentativní, považujeme závěry, které jednotlivé kapitoly přinášejí, za významné přinejmenším v kontextu České republiky. Pokud je nám známo, přímo rozhovory s žáky nad řešeními matematických úloh knižně zpracovány nebyly (některé jednotlivé studie jsou zmíněny v příslušných oddílech).

Kniha je určena zejména didaktikům matematiky, badatelům v oblasti didaktiky matematiky a psychologie, doktorandům a učitelům 1. stupně a učitelům matematiky.

/**2**/

Slovní úlohy jako kritické místo matematiky 1. stupně základní školy

Radka Havlíčková, Lenka Hříbková a Anna Páchová

Žákyně: „Nedovedu si představit, kolik takové kolo stojí, ale vyšlo mi to."

V našem předcházejícím výzkumu učitelé často upozorňovali, že slovní úlohy činily a činí potíže žákům na 1. i na 2. stupni základní školy. Někteří dokonce uváděli, že přispívají k neoblíbenosti matematiky jako předmětu (Rendl, Vondrová a kol., 2013).[13] Problematika slovních úloh je velmi rozsáhlá, existuje nepřeberné množství výzkumů, které se jimi zabývají. Na některé z nich se zaměříme níže. Nejdříve se však budeme věnovat termínu slovní úloha a vybraným typologiím slovních úloh.

13 Řada jiných studií potvrzuje (i když ne v přímé vazbě na slovní úlohy), že žáci nemají matematiku v oblibě a považují ji za obtížnou (Hrabal, Pavelková, 2010; Pavelková, Škaloudová, Hrabal 2010).

2.1 TEORETICKÝ RÁMEC A SOUVISEJÍCÍ VÝZKUM

2.1.1 SLOVNÍ ÚLOHY: VYMEZENÍ, FÁZE ŘEŠENÍ A TYPOLOGIE

Vymezení pojmu slovní úloha je v didaktice matematiky již víceméně etablováno. Např. J. Vyšín (1962) uvádí:

> Slovními úlohami bývají nazývány úlohy aritmetické nebo algebraické, formulované slovy, nikoliv matematickými symboly, nebo úlohy z praxe, jejichž řešení vyžaduje rozřešení aritmetické nebo algebraické úlohy. Geometrické úlohy se obvykle nepokládají za slovní úlohy. (s. 107)

Podobně se vyjadřují O. Odvárko a kolegové (1990), kteří dělí slovní úlohy na slovní úlohy s matematickým a s nematematickým obsahem. V odborné literatuře, např. A. Toom (1999), se setkáváme i s názory, že východiskem pro slovní úlohy by neměly být pouze reálné situace/problémy, ale také problémy nereálné a čistě matematického charakteru. Hlavním argumentem je, že tyto matematické slovní úlohy mohou žákům zprostředkovat i složitější matematické koncepty či struktury a efektivněji tak přispět k rozvoji abstraktního uvažování, a to bez potřeby náročné odborné terminologie (jako příklad uvádí Toom teorii čísel, teorii grafů a kombinatoriku). Toom rovněž poukazuje na to, že takzvané „real-world problems“ – úlohy ze života často nejsou a ani nemohou být skutečným obrazem reality, která je příliš komplexní a plná zbytečností (s. 38), a tedy ani nácvik jejich řešení nevede k požadovanému zlepšení matematických kompetencí.

Ovšem jiní autoři se při vymezení pojmu slovní úloha omezují jen na úlohy s praktickým kontextem (což bude i případ naší kapitoly). Např. F. Kuřina (1989, s. 61) se vyjadřuje ve smyslu, že ve slovních úlohách je „popsána určitá reálná situace a úkolem řešitele je určit odpovědi na položené otázky“. B. Greer, L. Verschaffel a E. de Corte (2002) za slovní úlohu považují text, který obsahuje kvantitativní informace a popisuje situaci, s níž je čtenář obeznámen. Text pokládá otázku po kvantitě a odpověď na tuto otázku lze odvodit pomocí matematických operací na údajích z textu nebo jinak získaných. V souladu s těmito vymezeními budeme pracovat s úlohami, které jsou dány v nějakém řešiteli srozumitelném kontextu a pokládají otázky, které se dají zodpovědět pomocí údajů v textu uvedených.

Řešení slovní úlohy probíhá v několika fázích, které různí autoři rozpracovávají do různého stupně podrobnosti. Pro naše potřeby postačí, když vymezíme fáze čtyři. Žák úlohu nejdříve vnitřně přijme (tedy je ochoten ji řešit) a snaží se jí porozumět (např. si uvědomuje, co je dáno a co hledáme), přičemž je učitelem veden k tomu, aby si udělal zápis zadání. Domníváme se, že v této fázi vzniká mentální reprezentace úlohy, ve které jsou údaje a vztahy v dané úloze nejprve simultánně uchopeny ve formě schématu[14] řešení a následně se opět „rozvinují“, nyní však již v matematickém jazyce. Další fází je tedy matematizace, kdy žák formuluje úlohu v jazyce matematiky. Ten může být aritmetický (pomocí výpočtů), algebraický (např. rovnicemi) či pomocí různých obrázků a diagramů. Následně žák provede řešení matematicky formulované úlohy a získaný výsledek ověří pomocí sémantické zkoušky v kontextu úlohy a reality (tedy interpretuje výsledek matematické úlohy v původní situaci, Odvárko a kol., 1990).

Typologií slovních úloh z hlediska jejich obsahu a struktury se u nás zabývalo více autorů, přičemž pro ni používali různá kritéria. Např. J. Divíšek a kol. (1989) třídí slovní úlohy na jednoduché (na řešení stačí jeden početní výkon)[15] a složené (na řešení jsou třeba alespoň dva početní výkony). Je zřejmé, že takovéto členění není dostatečné; na obtížnost slovní úlohy nemá vliv jen počet početních výkonů. Zajímavé je členění podle Nikitina, které pochází již z roku 1940. Jednoduché úlohy dělí na úlohy přímé a nepřímé. U přímých odpovídá text úlohy operaci, kterou ji řešíme. U nepřímých tomu tak není, text úlohy naznačuje operaci inverzní. V naší současné terminologii hovoříme o slovních úlohách s antisignálem (Hejný, 2014):[16] „Slovo, které v slovní úloze napovídá, jakou operaci nutno k řešení použít, nazýváme signálem. V případě, že takové slovo řešitele zavádí, nazveme jej antisignálem.“ (s. 51) [17] V zahraniční literatuře se tyto typy úloh nazývají také „inconsistent“ nebo úlohy s „inconsistent language“. Úlohy s antisignálem jsou pro žáky mnohem složitější, jak opakovaně potvrzují výzkumy (např. Fuson, Caroll, Landis, 1996; Mevarech, 2010, a další výzkumy, na které je v posledně jmenované práci odkaz).

Nás přirozeně zajímají spíše slovní úlohy řešitelné na 1. stupni. Asi nejznámější dělení elementárních aditivních slovních úloh pochází ze 70. let 20. století (Heller, Greeno, 1978): „change problems“ (úlohy na změnu stavu v čase, obsahují dynamickou situaci), „combine problems“ (úlohy na součet množství, obsahují statickou situaci) a „compare problems“ (porovnávací úlohy). Tato klasifikace je někdy doplňována, např. se vyděluje čtvrtý typ úloh: „equalize problems“ (Carpenter, Hiebert, Moser, 1983), které mají charakteristiky jak úloh na změnu stavu, tak porovnávacích úloh. Přirozeně je pozornost věnována i klasifikaci jednokrokových úloh na násobení. Např. práce (Smidt, Weiser, 1995) vyděluje úlohy, v nichž jde o a) *n*tý násobek

14 Schématem v kontextu řešení slovních úloh pro potřeby tohoto textu míníme postupně vznikající mentální reprezentaci úlohy, respektive jakési simultánní uchopení údajů a vztahů v dané úloze, které vede k následnému řešení. Prototypickým schématem je pak míněno takové schéma, které nemusí být vždy v korespondenci s danou úlohou, ale odvolává se na dřívější zkušenost dítěte s podobnými typy úloh.

15 Srv. s monotriádickými úlohami a vícekrokovými úlohami, které pracují s dvěma a více triádami (viz oddíl 4.3.2).

16 Oproti Nikitinovi Hejný nehovoří o celém textu úlohy, ale o slově.

17 Slovních úloh s antisignálem není v nejčastěji používaných učebnicích na 1. stupni mnoho (Strnadová, 2006; Weinzettel, 2014).

množství,[18] b) kombinatorické násobení, c) násobení operátorů, d) násobení ve vzorci (např. vzorci pro rychlost).

Dalšími typologiemi se podrobněji zabývat nebudeme. Slovní úlohy by bylo možné klasifikovat podle typu (např. o pohybu, o společné práci), podle stupně vymezenosti úlohy (zda obsahují všechny nutné informace pro řešení, či naopak nějaké nadbytečné informace), podle reálnosti kontextu, podle familiárnosti kontextu apod.

Další charakteristikou pro třídění slovních úloh, která byla při tvorbě našich úloh významně zohledňována, je tzv. sémantické ukotvení čísla, které rozpracoval M. Hejný (např. 2014). Číslo může v rámci slovních úloh vystupovat v různých rolích, může být reprezentováno různými modely. Existují tři základní kategorie – číslo jako kvantita (např. 7 minut, 18 jablek), číslo jako identifikátor (např. tramvaj číslo 15) a číslo jako symbol (např. číslo 4 bylo u pythagorejců symbolem spravedlnosti). Nejpodstatnější skupinou, i z hlediska vyučování matematice, je ukotvení čísla jako kvantity. Tato skupina je dále strukturována na číslo jako stav, jako operátor a jako frekvence. Níže popíšeme některé z těchto kategorií.

Stav můžeme dále rozlišit na počet a veličinu – počet je kvantita, kterou měříme na kusy (např. mám 2 bratry), zatímco veličinou nebo mírou nazýváme to, co měříme pomocí určité jednotky (např. venku je 12 stupňů). Číslo jako operátor popisuje vztah dvou stavů, přičemž když se jedná o stavy dvou různých objektů, mluvíme o operátoru porovnání (např. Markéta má o jednu panenku méně než Jana), když se jedná o stavy jednoho objektu v různých časech, mluvíme o operátoru změny (např. teplota vzrostla o 3 stupně). Operátor porovnání lze většinou uchopit statickým obrázkem, zatímco operátor změny vyžaduje např. šipku, neboť je popisována situace dynamická, pomíjivá. Operátory mohou být buď aditivní (Lenka je o dvě kila lehčí než Bětka), nebo multiplikativní (Lenka má dvakrát více knih než Bětka). Pro aditivní operátor je z pohledu jazyka charakteristická předložka „o“, pro multiplikativní slovo „násobný“, případně procenta, zlomky. Operátor porovnání je často formulován pomocí příslovce (více, déle, aj.), nebo adjektiva (vyšší, tepleji, aj.), Operátor změny bývá často spojen se slovesem.

Tyto role čísla ve slovní úloze mají podstatný vliv na její obtížnost. Např. úloha, kde všechna čísla jsou stavy, je pro žáky jednodušší než ta, ve které jsou čísla pouze v roli operátoru. Důvodem je skutečnost, že například operátor změny k sobě váže další „virtuální neznámé“ týkající se jednak počátečního stavu a jednak konečného. Ty sice nejsou pro řešení potřeba, ale žáci mají tendenci se na ně ptát (Slezáková, 2007). Jinými slovy, číslo jako stav je soběstačné („Ema má 6 kuliček“), zatímco operátor je vždy propojen na dvě čísla („Ema má o 6 kuliček více než Lenka“ – tedy číslo 6 je spojeno s dvěma dalšími čísly – počtem kuliček Emy a počtem kuliček Lenky, tato čísla jsou tedy

18 Mezi nimi vyděluje další typy, např. úlohy na porovnání a změnu.

v operátoru implicitně přítomna). Žáci mohou mít pocit, že vazbě „o 6 více" nemohou rozumět, pokud alespoň jedno další číslo neznají. Pro dítě je náročné pracovat s operátory, i když již dobře počítá se stavy. Je pro něj těžké si uvědomit, že na vstupním čísle nezáleží.

Závěrem zmíníme ještě tzv. slovní úlohy „proti toku času". Tyto slovní úlohy jsou podskupinou úloh dynamických, jejichž podstatou je, že se odehrávají ve dvou i více různých časech, případně také na různých místech. Jejich náročnost spočívá v řazení jednotlivých informací v zadání úlohy. Charakteristické je řazení neznámé na začátek zadání. Často jsou tyto úlohy zároveň s antisignálem nebo zároveň operátorové, ale není to podmínkou. Při výpočtu je nutné postupovat z přítomnosti, či dokonce budoucnosti do minulosti. Úlohy kladou vyšší nároky na řešitele z hlediska porozumění textu i vytvoření správné představy popisované situace. Příkladem takové úlohy je např. naše úloha 1/3 (viz oddíl 2.3.1): „Na hřišti si hrálo několik dětí. Aleš pozoroval, že v jedné chvíli pět dětí přišlo a dvě děti odešly. Bylo pak na hřišti více, nebo méně dětí? O kolik?" Podobně jako úlohy s antisignálem či úlohy operátorové se tento typ úloh vyskytuje v našich učebnicích střídmě (např. Weinzettel, 2014).

Jak již bylo uvedeno, slovní úlohy byly a jsou předmětem bohatého didakticko-matematického výzkumu. Významnou oblast tvoří výzkumy zabývající se účinností různých didaktických praktik učitelů při práci se slovními úlohami ve vyučování. Ty však jsou mimo oblast našeho zkoumání, proto se jimi zabývat nebudeme. Důležité pro naše potřeby jsou výzkumy věnující pozornost přímo žákům, kteří slovní úlohy řeší. V nich dochází k úzkému propojení řešených témat s kognitivní psychologií. Velká pozornost je věnována především pracovní paměti (např. Kimberly, Marcia, Steven, 2010), logickému myšlení (Alibali, 2005) či osobnostním charakteristikám žáků (Verschaffel, Greer, de Corte, 2000). Často se rovněž hovoří o problematice čtenářské gramotnosti a o porozumění textu, které mají zásadní vliv na správnost řešení slovních úloh (např. Jordan, Kaplan, Hanich, 2002). Vzhledem k tomu, že se jedná o problematiku úzce související s naším výzkumem, věnujeme se některým tématům výzkumů podrobněji. Je třeba upozornit, že většina níže uváděných výzkumů se vztahuje k 1. stupni základní školy, i když někteří autoři tento stupeň překračují.

2.1.2 ŘEŠITELSKÉ STRATEGIE A CHYBY ŽÁKŮ PŘI ŘEŠENÍ SLOVNÍCH ÚLOH

Tato oblast výzkumného zájmu je našemu zaměření nejbližší, protože je orientovaná přímo na žáka při řešení slovních úloh. Různí autoři se zabývali žákovskými strategiemi řešení slovních úloh a chybami, kterých se žáci dopouštějí. Z českých jmenujme např. publikace (Hejný, 1995; Novotná, 2000; Stehlíková, 1995a). Jejich společným jmenovatelem je použití metody analýzy písemného řešení žáka, tzv. atomární analýzy.[19] M. Hejný (1995) prostřednictvím analýzy písemných řešení žáka spolu s následným rozhovorem zkoumal, jakým způsobem se žák tzv. zmocňuje slovní úlohy (konkrétně, do jaké míry se tak děje s porozuměním), a popsal některé typy žákovských selhání spolu s návrhem možné reedukace. Také J. Novotná (2000) se věnovala zejména fázi uchopování slovní úlohy a použití tzv. úsečkových legend. Dále zkoumala vliv konceptuálního vs. procesuálního zadání slovní úlohy na volbu strategie jejího řešení. N. Stehlíková (1995a) prostřednictvím analýzy 324 písemných řešení žáků 5. ročníku jedné slovní úlohy identifikovala a popsala jejich řešitelské strategie a klasifikovala chyby, jichž se dopustili. Prezentovala schéma, díky němuž je možné sledovat v písemném řešení přechody mezi kalkulativní a sémantickou hladinou.

V zahraničí se výzkumy realizovaly s různými skupinami žáků, jejichž výsledky a strategie řešení se vzájemně porovnávaly, např. úspěšní a neúspěšní řešitelé, žáci s dyskalkulií a bez této poruchy, dívky a chlapci, matematicky nadaní a méně nadaní žáci apod. Uvedeme alespoň výzkum (Heinze, 2005), který byl zaměřen na popis strategií řešení nerutinních slovních úloh a na analýzu myšlenkových procesů matematicky nadaných žáků na 1. stupni a žáků, kteří takové nadání nevykazovali. Výsledky ukázaly významné rozdíly mezi skupinami ve schopnosti systematicky řešit slovní úlohy, v rychlém vhledu do matematické struktury úlohy a schopnosti vysvětlit své řešení.

Někteří autoři poukazují na problematickou oblast, která úzce souvisí s názory našich učitelů, kteří si stěžovali na „neochotu žáků myslet". Jde o to, že se žáci naučí určité postupy a ty pak aplikují na předkládané úlohy. L. Verschaffel, B. Greer a E. de Corte (2000) citují jeden starší výzkum (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Grenoble, 1980), kde byly žákům předkládány „nesmyslné úlohy", respektive takové, na které nebylo možné na základě zadání najít odpověď. Jednou z takových úloh je třeba úloha: „Ve stádě je 125 ovcí a 5 psů. Jak starý je pastýř?" Ukázalo se, že pouze 12 % dětí ve věku 7–9 let bylo schopno na zadanou otázku správně odpovědět. Ostatní děti se pokoušely úlohu „vypočítat". Často citovaná je odpověď jednoho chlapce, který počítal takto: „125 + 5 = 130… to je moc, 125 – 5 = 120… to je taky moc, 125 : 5 = 25... to by šlo. Pastýřovi je 25 let." Jiný výzkum (Radatz, 1983, 1984, cit. v Verschaffel, Greer, de Corte, 2002) dále ukázal, že četnost tohoto způsobu řešení úloh se zvyšuje spolu se školní zkušeností žáků. V tomto experimentu byly dětem různého věku (od mateřské školy až po 6. ročník) zadávány klasické slovní úlohy a mezi nimi několik úloh nesmyslných. Ukázalo se, že většina nejmladších dětí (90 %) z mateřské školy a z 1. ročníků dokázala správně říct, že úlohy nelze vyřešit, u starších dětí častěji docházelo

19 Jedná se o kvalitativní metodu, která popisuje, jakým způsobem lze analyzovat písemná řešení žáků. Do jisté míry je podobná zakotvené teorii (Strauss, Corbinová, 1999) uplatněné na písemné řešení. Z této teorie však atomární analýza nevychází.

k chybným řešením (s výjimkou dětí 5. ročníku to bylo tak, že čím vyšší ročník, tím děti řešily hůře). Greer, Verschaffel a de Corte (2002) tento jev do jisté míry vysvětlují pojmem „word problem game“, který zahrnuje přesvědčení žáků a učitelů týkající se účelu slovních úloh, jejich předpokládané struktury apod. a komplexní síť implicitních pravidel a očekávání (včetně očekávání, že pokud je úloha zadána v matematice, bude mít řešení).

Podobné výsledky přináší i výzkum (Palm, 2008), v němž byly použity „autentické slovní úlohy“ oproti běžným slovním úlohám s žáky 5. ročníků (n = 161). Mimo jiné bylo zjištěno, že u autentičtějších úloh se statisticky významně zvýšila tendence žáků využít pro jejich řešení znalosti a zkušenosti z reálného života (z 33 % na 51 %). V rozhovorech s žáky se ukázalo, že nejčastější příčina nerealistických odpovědí spočívala v povrchních řešitelských strategiích, které se soustřeďovaly spíše na čísla v úloze než na pečlivou analýzu textu. Ovšem na druhém místě byla žákovská přesvědčení týkající se řešení úloh v matematice a konkrétně řešení slovních úloh: všechny úlohy mají řešení; všechny úlohy dokáží žáci řešit; výsledkem je jedno číslo; k řešení úlohy stačí jen to, co je v ní napsáno; úvahy o věcech, o nichž se explicitně nemluví, se používat nemají; školní matematika nemusí být konzistentní s životem mimo školu.

2.1.3 KOGNITIVNÍ CHARAKTERISTIKY ŽÁKŮ

Jak bylo uvedeno výše, jedním z často diskutovaných témat ve vztahu k řešení slovních úloh je oblast čtenářských dovedností a porozumění textu. Výzkumům zaměřeným na uchopení čteného textu žáky a na situační kontext slovních úloh se věnují např. studie (Reikeras, 2006; Vicente, Orrantia, Verschaffel, 2008). Cílem výzkumu Reikerase (2006) bylo analyzovat výkon dětí, které měly různou úroveň čtení a různou úroveň výkonu v matematice. Výzkumu se zúčastnilo 941 dětí od 8 do 13 let, které byly rozděleny do čtyř skupin a věkových pásem. Výsledky indikují (v případě existence průměrných výkonů v matematice a čtení a v případě nízkých obecných matematických schopností), že nízký výkon ve čtení málo interferuje do vývoje výkonu žáků v aritmetice.

Ovšem jiní autoři (např. Pape, 2004; Grimm, 2008) opakovaně nalézají vysoké korelace mezi čtenářskými dovednostmi a řešením slovních úloh. Někteří autoři se domnívají, že spojení mezi řešením slovních úloh a porozuměním čtenému textu je zprostředkováno skrze *rozumové schopnosti,* respektive že výše intelektu ovlivňuje jak řešení úloh, tak porozumění textu (Fuchs, Fuchs, 2002; Fuchs, Fuchs, Prentice, 2004). Nicméně N. C. Jordanová, D. Kaplan a L. B. Hanichová (2002) na základě dva roky trvajícího longitudinálního výzkumu zjistili, že zatímco čtenářské obtíže způsobovaly problémy v matematice, tak obráceně toto spojení nefungovalo. Respektive vyskytovaly se děti, které sice špatně počítaly, ale ve čtení neměly obtíže. Toto by však nebylo možné, pokud by korelace mezi oběma koncepty byla spjata pouze s výší rozumových schopností. Spojení byla nalezena rovněž mezi *technickou stránkou čtení* a řešením slovních úloh (Leppänen et al., 2006). Zde ale spojení zřejmě funguje tak, že technika čtení má vliv na porozumění textu (pokud je žák zahlcen technikou, na porozumění nezbývá kapacita), což ovlivňuje řešení úloh (Vilenius-Tuohimaa, Aunolab, Nurmib, 2008).

S problematikou porozumění textu někteří autoři rovněž spojují *problém matematické symbolizace,* respektive schopnost vyjádřit zadání slovní úlohy číselnými výrazy (Nathan, Kintsch, Young, 1992). Jiní autoři ale oponují a považují oba problémy za oddělené. Např. výzkum (Heffernan, Koedinger, 1997, 1998) ukázal, že někteří žáci úloze dobře rozumí, ale symbolické vyjádření přesto vázne. Podle autorů není hlavní problém v porozumění problému, ale v jeho *matematizaci* (následné řešení se podle jejich experimentu podaří, pokud žák zvládne matematizaci).

Mnoho výzkumníků se rovněž shoduje na důležitosti *pracovní paměti* pro řešení matematických úloh, zejména pak úloh slovních (Raghubar, Barnes, Hecht, 2010). V přehledovém článku výzkumů, které se zabývaly vztahem pracovní paměti a matematiky (Kimberly, Marcia, Steven, 2010), autoři rozlišují čtyři směry výzkumu: 1) role pracovní paměti v průběhu řešení matematických úloh, 2) individuální rozdíly v pracovní paměti u dětí s potížemi v matematice, 3) pracovní paměť jako prediktor matematického výkonu a výsledku a 4) longitudinální studie pracovní paměti a matematiky. Vztah mezi pracovní pamětí a řešením matematických úloh vychází ze samotného uchopení konceptu pracovní paměti jakožto mentálního prostoru, který zahrnuje kontrolní a regulační procesy a schopnost uchovat relevantní informace pro řešení úlohy (Miyake, Shah, eds., 1999). Z vymezení je patrné, že jakékoli řešení problému bude kapacitou a fungováním pracovní paměti ovlivněno. Pokud půjdeme dále, tak tato teze může souviset i s výše uvedeným vztahem mezi porozuměním textu a řešením matematických úloh. Pokud některá oblast (např. technická stránka čtení) bude jedince zahlcovat nad míru, bude kapacita pracovní paměti vyčerpána a nezbude prostor na samotné řešení úlohy (teorie kognitivního přetížení, Sweller, 1994, 2010). Důležitá je rovněž souvislost řešení úloh s *pozorností*, tedy s oblastí, která s pracovní pamětí úzce souvisí (více např. Engle, 2002). Opakovaně je prokazován vliv nepozornosti na řešení slovních úloh (Fuchs et al., 2006; Raghubar et al., 2009). Nepozornost je však oblast, která může být způsobena mnohým – může např. poukazovat na právě řečené přetížení pracovní paměti nebo může souviset s volními charakteristikami žáka (viz uváděná „neochota žáků myslet“).

Až na výjimky se výše citované studie opírají o kvantitativní výzkumný design. Pro účely našeho výzkumu, jehož hlavním cílem je identifikace problematických jevů při řešení slovních úloh, jsme oproti tomu zvolili kvalitativní výzkumný přístup. Ten nám umožnil identifikovat nejen problematické jevy, které se vyskytují při řešení slovních úloh našimi žáky 1. stupně základní školy, ale také možné příčiny a některé přístupy žáků k jejich překonávání.

2.2 SLOVNÍ ÚLOHY V ČESKÉ ŠKOLE A OBTÍŽE ČESKÝCH ŽÁKŮ

Slovní úlohy jsou pevnou součástí školské matematiky. Jejich hlavní cíl spatřují např. J. Divíšek a kol. (1989) v rozvoji schopnosti formulovat reálný nebo slovně vyjádřený problém matematicky (s. 123). Nejde přitom o to, aby se žák naučil formulovat a řešit všechny problémy kolem sebe, ale aby byl vybaven „účelnou pracovní metodou, která mu řešení problému usnadní". Zdůrazňuje, že žáci by neměli být za každou cenu nuceni k matematizaci, pokud vidí řešení úlohy okamžitě, a doporučuje učiteli, aby žáka, který úlohu vyřešil zpaměti, nejprve pochválil a teprve pak jej požádal o zápis výpočtu. Tvorbu zápisu u jednoduchých úloh považuje za dobrou průpravu k řešení složitějších úloh. M. Kubínová a J. Novotná (1998) ještě dodávají, že stejně hodnotná jako matematizace je také zpětná transformace, tedy převedení výsledků získaných matematickou cestou zpět do kontextu reálné situace, tedy ve školní praxi obvykle vyžadovaná odpověď na slovní úlohu. Blažková, Matoušková a Vaňurová (2002) v souvislosti se slovními úlohami zmiňují kromě rozvoje matematického myšlení i rozvoj pozornosti a představivosti a zdůrazňují také didaktický potenciál, např. že slovní úlohy mohou sloužit k hlubšímu porozumění matematickým pojmům, upevňovat početní návyky a uvědomělé používání základních početních operací a že při správném použití mohou mít značný výchovný dosah (který dále nespecifikují). Podle O. Odvárka a kol. (1990) mohou být slovní úlohy například prostředkem poznávání různých oblastí lidské činnosti a problémů, které je smysluplné v určitých oblastech řešit. Překvapivě (v kontextu našeho předchozího výzkumu, kde učitelé uváděli, že i díky slovním úlohám je matematika mezi žáky neoblíbená) také uvádějí, že mohou být „zdrojem zvyšování motivační úrovně studentů, rozvíjení zájmu učit se matematiku". M. Hejný (2014) považuje slovní úlohy také za diagnostický nástroj. Porozumění operacím podle něj znamená, že žák

> a) rozumí smyslu operace, tj. spolehlivě vyřeší *základní slovní* úlohu, b) pomocí dramatizace, manipulace nebo obrázku spolehlivě uchopí úlohu *s antisignálem* […], c) vytvoří dobrou slovní úlohu, jejíž matematický model je dán. (s. 169)

V Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání se slovní spojení „slovní úlohy" vyskytuje pouze v souvislosti s nestandardními aplikačními úlohami a problémy: „Žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky." Zaměříme-li se důkladněji na formulace cílů vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace, nalezneme opakovaně požadavek na „používání matematiky v reálných situacích“, „praktickém životě“ či dokonce schopnost „matematizovat reálnou situaci“. Není zde sice explicitně řečeno, že vhodným prostředkem k naplnění těchto cílů mohou být právě slovní úlohy, ovšem předpokládá se, že k tomu slovní úlohy v našem kurikulu slouží. Ačkoliv se vymezení pojmu slovní úloha různí, společným základem zůstává právě odkaz na reálnou situaci a potřebu matematizovat, tedy převádět určitou slovní situaci do matematického jazyka.

Z běžné školské praxe a např. i rozložení učiva v učebnicích a ve školních vzdělávacích programech vyplývá, že slovní úlohy jsou mnohými vnímány jako specifické „učivo“ matematiky základní školy. Učitelé se často vyjadřují v tom smyslu, že slovní úlohy slouží k procvičení nově probrané látky. Tomu odpovídá i běžná praxe v našich školách – slovní úlohy zařazuje učitel do výuky v okamžiku, kdy žáci proberou určitou oblast, např. sčítání desetinných čísel. Hlavním cílem řešení těchto úloh je procvičit a upevnit znalosti o desetinných číslech. Takové vnímání slovních úloh považujeme za zúžené, slovní úlohy mohou velice dobře posloužit například i k otevření určitého matematického učiva, konkrétního problému či jako motivační prvek nebo diagnostický nástroj.

2.2.1 SLOVNÍ ÚLOHY OČIMA ČESKÝCH UČITELŮ 1. STUPNĚ ZŠ

Slovní úlohy byly učiteli 1. stupně základní školy v našem předcházejícím výzkumu označeny za jedno z kritických míst, se kterými se ve škole často setkávají (Jirotková, Kloboučková, 2013). V rozhovorech s 25 učiteli 1. stupně se o nich zmiňovali téměř všichni dotazovaní. Pokud se zaměříme na obtížnost slovních úloh, tak se učitelé domnívali, že k ní přispívá např. nedostatečné logické myšlení, nepozornost žáků a špatné čtení. Příčinu potíží žáků někteří dotazovaní učitelé viděli obecně v nedostatečné připravenosti dětí na školní práci a zvláště na matematiku a počítání, v nedostatku běžných životních zkušeností, v deficitech v oblasti čtenářské gramotnosti a v rodinné výchově (Hříbková, Páchová, 2013). Podle jejich názoru obtížnost slovních úloh způsobuje obecně neochota žáků přemýšlet. Klíčové však podle nich je čtení s porozuměním a povrchní čtení žáků. V této souvislosti učitelé také upozorňovali na fakt, že žáci neznají významy některých slov, problémy jim dělá zápis nebo znázornění slovních úloh. Poukazovali na neschopnost žáků vybrat podstatné informace z textu, formulovat odpověď na otázku ve slovní úloze a na řadu dalších problémů, které za svoji učitelskou praxi při práci se slovními úlohami zjistili.

Na některé otázky spojené s potížemi žáků se slovními úlohami jsme se učitelů dotazovali v další fázi výzkumu. Na rozsáhlé dotazníkové šetření, které probíhalo elektronicky formou online dotazníku a zúčastnilo se ho cca 645 učitelů 1. stupně základní školy z celé republiky, reagovali učitelé s různou délkou praxe (viz oddíl 1.1). Výrazně převažovali velmi zkušení a aprobovaní učitelé s praxí nad 10 let (81 % ze zúčastněných). V této fázi zpracovávání dat uvádíme výsledky frekvenční analýzy odpovědí učitelů na dotazy, které se vztahovaly k oblibě matematiky a k slovním úlohám. Vzhledem k tomu, že se jedná o aktuálně zjištěné názory učitelů, věnujeme se jim podrobněji.

Ukázalo se, že pro účastníky výzkumu je učebnice matematiky jejich největší oporou při výuce[20] (pro 84,9 % z celkového počtu respondentů), i když doplňkově také používají při přípravě na výuku jiné učebnice, sbírky úloh, vlastní materiály a další materiály např. tzv. DUMy z Metodického portálu RVP.

Několik položek dotazníku se vztahovalo k předmětu matematika a mapovalo názory učitelů na její oblibu u žáků. Většina učitelů 1. stupně ZŠ si nemyslí (72,8 %), že v průběhu 1. stupně dochází k poklesu obliby matematiky jako předmětu. Toto zjištění je povzbudivé, ale je částečně v rozporu s tím, co uváděli učitelé v rozhovorech v našem předcházejícím výzkumu[21] (Hříbková, Páchová, 2013; Jirotková, Kloboučková, 2013), a s tím, co uvádí M. Chvál (2013). Relativně vyrovnané však jsou nesouhlasné a souhlasné odpovědi učitelů v případě otázky, zda obliba matematiky jako předmětu klesá v důsledku nástupu složitějších slovních úloh. S tímto názorem souhlasí nebo spíše souhlasí 50,3 % učitelů v dotazníku.

Z dotazníku vyplynuly další informace, které se přímo vztahují ke slovním úlohám pro 1. stupeň a které se týkají toho, co učitelé považují za důležité pro jejich úspěšné řešení.[22] Např. učitelé kladou důraz na nutnost zautomatizování početních spojů u žáků (69,7 %), 83 % učitelů považuje řešení typových slovních úloh za velmi důležité a téměř 71 % učitelů považuje za velmi důležité pro porozumění slovní úloze provést její zápis. Za upozornění stojí zjištění, že 92 % učitelů vede žáky k tomu, aby v úloze vyhledali slova, která signalizují početní operaci. Rovněž 84 % učitelů se domnívá, že úspěšnost řešení slovních úloh poukazuje na vyšší rozumové předpoklady žáka. Z dotazníku vyplývá, že mezi dotazovanými učiteli převažuje názor, že pro úspěch v matematice je podstatnější inteligence a nadání oproti píli a motivaci žáků. Souhlasně s našimi zjištěními v předcházejícím výzkumu (Jirotková, Kloboučková, 2013) 79,2 % učitelů udalo, že špatní čtenáři mají problémy s řešením slovních úloh.

Jiné položky dotazníku se zaměřily na zjištění názorů učitelů na podstatu rozdílu mezi úspěšnými a málo úspěšnými řešiteli slovních úloh (viz tab. 2.1). Učitelé se mohli vyjádřit k devíti uvedeným rozdílům, resp. měli označit tři, které považují za nejpodstatnější. Nejčastěji byla označena odlišnost ve schopnosti převést text úlohy do matematické struktury (provést matematizaci), dále pak rozdíl ve schopnosti systematicky pracovat a ve schopnosti stanovit

20 To znamená, že velká pozornost by měla být věnována tvorbě kvalitních učebnic.
21 Tehdy jsme ovšem dělali hloubkové rozhovory jen s 25 učiteli 1. stupně, i když také pocházeli z celé republiky.
22 Na jednotlivé otázky odpovědělo mezi 570 a 645 učiteli.

si předem postup řešení. Nejméně se podle nich liší úspěšní a neúspěšní řešitelé slovních úloh v rychlosti potřebných výpočtů.

Tab. 2.1: Rozdíly mezi úspěšnými a neúspěšnými řešiteli slovních úloh (*n* = 590, učitelé mohli vybrat tři položky)

Rozdíl mezi úspěšným a neúspěšným řešitelem slovních úlohy spočívá ve	**% souhlasících učitelů**
schopnosti propojit text slovní úlohy s její matematickou strukturou	71,9
schopnosti pracovat systematicky	38,6
schopnosti stanovit si předem postup řešení	38,1
schopnosti vysvětlit řešení slovní úlohy	31,0
schopnosti udržet v paměti všechny potřebné číselné údaje a kontext	23,1
rychlosti rozpoznání matematické struktury úlohy	21,4
schopnosti vyřešit matematicky nebo textově neobvyklé (nerutinní) slovní úlohy	21,0
schopnosti zapamatovat si sled dílčích kroků řešení	20,7
rychlosti potřebných výpočtů	11,5

Pokud porovnáme některé údaje z rozhovorů s učiteli a z dotazníku, zaznamenáme relativní shodnost odpovědí učitelů, ale i odlišnosti. To může být mimo jiné způsobeno odlišným metodologickým přístupem, který byl u výzkumů uplatněn, a odlišnými metodami, které byly použity, tedy kvalitativní analýza odpovědí učitelů v případě rozhovorů a naopak kvantitativní zpracování odpovědí na pevně zadané otázky dotazníku, který vyplňoval velký počet učitelů. Příkladem může být konstatování v předešlé studii (Jirotková, Kloboučková, 2013), že se učitelé 1. stupně v rozhovorech „nezmiňovali o potřebě používat reálné problémy, resp. úlohy ze života“ (s. 58), kdežto v dotazníku se 98,2 % učitelů domnívá, že pro porozumění matematice jsou nezbytné příklady z praktického života. Tato položka jim však byla explicitně předložena.

V dalších částech kapitoly se k některým výsledkům frekvenční analýzy odpovědí učitelů z dotazníků vracíme.

2.2.2 OBTÍŽE ČESKÝCH ŽÁKŮ 1. STUPNĚ SE SLOVNÍMI ÚLOHAMI V TESTOVÁNÍ

V mezinárodních srovnávacích výzkumech se slovní úlohy objevují poměrně hojně. Z obecných závěrů šetření TIMSS 2011, který ve čtyřletém cyklu testuje úroveň matematických a přírodovědných znalostí a dovedností žáků 4. a 8. ročníků, vyplývá, že se čeští žáci po statisticky významném zhoršení mezi lety 1995 a 2007 postupně dostávají zpět na hladinu nadprůměru, který vykazovali v roce 1995. Stále však zaostávají za žáky jiných zemí EU (např.

Anglie, Nizozemska, Německa) a Ruska. Nás však zajímají zejména výsledky v oblasti slovních úloh.

Mezi testovací úlohy TIMSS 2011 byla zařazena slovní úloha, kterou neměli žáci numericky řešit, ale pouze vybrat, který z navrhovaných postupů by je dovedl ke správnému řešení.

ÚLOHA M6 (TIMSS 2011)

Šest set knih musí být zabaleno do krabic, do každé z nich se vejde 15 knih. Kterým výpočtem zjistíš počet krabic, které na zabalení knih potřebuješ?
A) Přičti 15 k 600. B) Odečti 15 od 600. C) Vynásob 600 číslem 15. D) Vyděl 600 číslem 15.

Jednalo se o úlohu, ve které měli žáci prokázat, jak umí matematizovat reálnou situaci a zda rozumí operaci dělení. Úspěšně si s úlohou poradilo 52,7 % českých žáků, což je přibližně jen o 2 % méně než mezinárodní průměr. Stejného výsledku dosáhli žáci v podobné úloze při testování v roce 2007. Větší potíže měli naši i zahraniční žáci s úlohou M17 (TIMSS 2007).

ÚLOHA M17 (TIMSS 2007)

Otec vzal své tři děti na výstavu. Lístky pro dospělé stály dvakrát více než pro děti. Otec zaplatil za 4 lístky celkem 50 zedů. Kolik zedů stál jeden dětský lístek? Napiš postup výpočtu.

Úlohu správně (tedy numericky správně a s dobře zapsaným postupem výpočtu) vyřešilo jen 8,5 % českých žáků, přičemž mezinárodní průměr nebyl o moc vyšší; činil 11,7 %. Zajímavé je, že 17,3 % českých žáků došlo ke správnému výsledku, ale nezaznamenalo správně postup, tedy pravděpodobně úloze rozuměli, zvládli ji vyřešit, ale neuměli své myšlenky zapsat. Za povšimnutí stojí také fakt, že 25,6 % žáků se o řešení úlohy vůbec nepokoušelo. V úloze se očekávalo řešení úvahou – stojí-li lístek pro dospělého dvakrát tolik, co pro dítě, pak je vstupné pro tři děti a jednu dospělou osobu stejné jako vstupné pro 5 dětí. Takové uvažování se ovšem ukázalo pro žáky 4. ročníků jako náročné.

O trochu lépe si poradili žáci s popisem postupu při řešení úlohy M3 z roku 2007.

ÚLOHA M3 (TIMSS 2007)

Minulý rok chodilo do školy J. A. Komenského 92 chlapců a 83 dívek. Tento rok do školy chodí 210 žáků, z toho 97 chlapců. O kolik více dívek chodí do školy letos než v minulém roce? Napiš postup výpočtu.

Úlohu úspěšně vyřešilo 22,7 % českých žáků (mezinárodní průměr byl 18,4 %), přičemž pouze 2,8 % nebylo schopno provést zápis, přestože se dopracovalo ke správnému výsledku.

Největší potíže měli naši žáci s úlohami (i slovními), kde se objevovaly zlomky. Důvodem je nejspíše naše kurikulum, ve kterém na určitou dobu zlomky z 1. stupně zcela vypadly.[23] V takových úlohách dosahovali žáci někdy až třikrát horšího výsledku než mezinárodní průměr. Četnosti nesprávných odpovědí u některých úloh ovšem naznačují, že žáci mají potíže již na úrovni základního pochopení pojmu zlomek. To se ukázalo např. v úloze M25, kde nejčastější chybnou odpovědí byla odpověď D (celých 60,9 %). Správnou odpověď C vybralo jen 6,7 % žáků.

ÚLOHA M25 (TIMSS 2007)

Který zlomek se rovná $\frac{2}{3}$?
A) $\frac{3}{4}$, B) $\frac{4}{9}$, C) $\frac{4}{6}$, D) $\frac{3}{2}$

Testování PIRLS, zaměřené na čtenářskou gramotnost žáků 4. ročníku, které probíhalo v roce 2011 a bylo vyhodnocováno v souvislosti s TIMSS 2011, objevilo silnou korelaci mezi čtenářskou a matematickou gramotností. Pokud žáci dosáhli vysoké úrovně v matematice, dosáhli ve většině případů (asi ve dvou třetinách) dobré úrovně také v obou dalších testovaných gramotnostech – ve čtenářské a přírodovědné. Naopak dosažení nadprůměrného výsledku pouze v matematice se vyskytovalo jen ojediněle. Jinými slovy, žák, který je zdatný v matematice, zpravidla nemá problémy se čtenářskou ani přírodovědnou gramotností. Dalším zajímavým zjištěním tohoto šetření, zaměřeného zároveň na rodinné zázemí žáků, bylo, že dělání předčtenářských aktivit před nástupem do školy má stejný vliv na zvládání jak čtenářských, tak početních úkolů v budoucnosti.

Zaměříme-li pozornost na podobné výzkumy u nás, pak v letech 2006 a 2007 provedla agentura CERMAT rozsáhlejší testování dovedností v matematice u žáků 5. ročníku. Z testování v roce 2006, kterého se zúčastnilo celkem 8 804 žáků, vyplynuly dva hlavní závěry – žáci mají značné potíže s geometrickými úlohami (viz kap. 3 a 5), a dále s chápáním slovních spojení „kolikrát více/méně“. Autoři testu sice připouštějí, že určité procento žáků chybovalo v důsledku nedbalého čtení (zaměnili za „o kolik více/méně“), ale propad byl tak velký, že je třeba hledat možné příčiny i jinde. Autoři rovněž poukazují na celkovou chabou dovednost žáků vyjadřovat se, formulovat závěry svými vlastními slovy a vnímat skutečný obsah čteného textu (žáci měli v testování odpovídat celou větou). Výsledky testování z roku 2007 ukazují, že většina žáků nemá problémy s početními algoritmy, dokud nejsou úlohy formulovány slovně. Doslovně je uvedeno, že „žáci jsou zvyklí pracovat s čísly převážně jen podle naučených či uvedených vzorců. U slovních úloh se žáci nedokáží

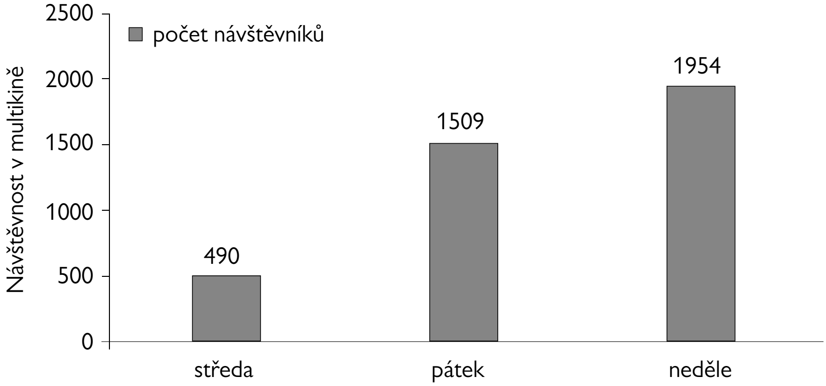
23 Do RVP pro ZV se vrátily opět v září 2013.

zorientovat a správně vybrat vhodnou početní operaci či posloupnost operací.“[24] (CERMAT, 2007a, s. 26)

Vynecháme-li geometrické úlohy, pak nejproblematičtější se ukázala být úloha 7 z testování CERMATu z roku 2006,[25] kterou dobře vyřešilo pouze 21,9 % procent žáků ve variantě A (18,0 % ve variantě B). Žáci měli na základě informací z grafu zjistit „přibližně kolikrát méně bylo návštěvníků ve středu než v neděli“ (viz obr. 2.1). Problém se čtením grafu můžeme prakticky vyloučit, neboť téhož grafu se týkala i úloha 5 („o kolik méně bylo návštěvníků v pátek než v neděli“), ve které byli žáci naopak velmi úspěšní (77,7%). Problém tedy pravděpodobně spočíval v rozdílu mezi „kolikrát méně“ a „o kolik méně“.

Text k úlohám 5–7

Graf znázorňuje počet diváků, kteří se během tří dnů přišli podívat do pražských kin na film Harry Potter a ohnivý pohár



Obr. 2.1: Úloha z testování 5. ročníků (CERMAT, 2006)

Z pohledu našeho výzkumu jsou zajímavé rovněž výsledky úlohy 8 (CERMAT 2006, varianta A), neboť jsme do série našich úloh zařadili podobnou (viz oddíl 2.3.1).

ÚLOHA 8 (CERMAT 2006)

Nedávno jsme si koupili kalendář na tento rok, neboť byl zlevněn na 24 Kč. Byla to $\frac{1}{3}$ původní ceny. Víte, kolik stál původně?

A) 16 korun, B) 32 korun, C) 48 korun, D) Žádná z uvedených cen není správná.

24 Překvapivé a pro matematiku povzbudivé je na druhou stranu zjištění CERMATu, že žáci 5. ročníků mají matematiku mnohem více v oblibě než český jazyk, v případě chlapců dokonce čtyřnásobně více.

25 http://www.cermat.cz/ukazky-testu-1404034151.html

Úspěšnost v řešení této úlohy byla 52,8 %, což je poměrně překvapivé, když si uvědomíme, jaké potíže měli žáci s jednoduššími slovními úlohami se zlomky ve 4. ročníku (jak vyplynulo z šetření TIMMS, viz výše). Možným důvodem vysoké úspěšnosti však může být také to, že správná odpověď (odpověď D) v sobě zahrnuje všechny ostatní výsledky kromě těch uvedených v odpovědích A, B a C. Tedy například i jednu z pravděpodobných variant – 8 Kč (což je ⅓ z 24).

O poznání hůře (41,5%) si čeští žáci poradili se složenou úlohou, v jejímž zadání se vyskytovala záporka „ne“. Příčiny neúspěchu však podrobněji uvést nemůžeme.

ÚLOHA 9 (CERMAT 2006)

Každý účastník lyžařského zájezdu má zaplatit 2 100 Kč. Pan učitel, který by měl od dětí vybrat celkem 42 000 Kč, má zatím jen 25 200 Kč. Kolik dětí mu peníze ještě nepřineslo? A) 8 dětí, B) 14 dětí, C) 18 dětí, D) Žádný z uvedených počtů dětí není správný.

2.3 METODOLOGIE

2.3.1 VÝBĚR ÚLOH

Jak je patrné z předchozího textu, problematika slovních úloh je velmi komplexní. Pro naše účely jsme vytvářeli úlohy podobné klasickým, například těm z učebnic nakladatelství Alter (které jsou podle výsledků online dotazníku pro učitele, viz oddíl 1.1, nejčastěji používanou učebnicí na 1. stupni). Doplnili jsme je o úlohy méně standardní, zejména o úlohy s antisignálem a operátorové úlohy (viz oddíl 2.1.1) Jak vyplývá z práce M. Ptakové (2010) a rovněž z diplomové práce P. Weinzettel (2014), tyto úlohy se v našich nejpoužívanějších učebnicích prakticky nenacházejí, a lze tedy očekávat, že s nimi žáci budou mít potíže.

V tab. 2.2–2.6 uvádíme všechny úlohy, s kterými jsme v našem výzkumu pracovali, spolu s didakticko-matematickým komentářem a stručným řešením.[26] Snažili jsme se o rozmanitost situačního kontextu úloh a o různou náročnost v rámci jedné série úloh. Dále jsme úlohy variovali z hlediska použité aritmetické operace, počtu kroků nutných k jejich řešení, roli, v jaké se čísla v úloze nacházejí, přítomnosti antisignálu apod. Zařadili jsme také úlohu s nadbytečnými údaji (3/5) a úlohy nejednoznačné, jejichž řešení je závislé na

26 Vzhledem k počtu úloh neuvádíme podrobnou *a priory* analýzu úloh, tedy analýzu způsobů řešení, možných problémů žáků při jejím řešení a vlivu jednotlivých proměnných úlohy na tyto způsoby a problémy. Omezujeme se na stručný didaktický popis. K jednotlivým úlohám se vracíme v dalších oddílech, snažíme se tedy zamezit zbytečnému opakování.

žákově interpretaci zadání (2/5 a 3/4). Zařazením těchto úloh zjišťujeme, do jaké míry jsou žáci autonomní, tedy do jaké míry jsou schopni vnímat obsah textu, nedomýšlet zadání a odolávat dotváření stereotypního (očekávaného) kontextu.

Každá úloha má kód: ročník (pokud je tam např. číslo 1, znamená to, že úloha je určena pro žáky s dokončeným 1. ročníkem), lomeno číslo úlohy. K úloze uvádíme vždy pouze jeden z možných řešitelských postupů. Připouštíme, že žáci budou provádět jednotlivé kroky v jiném pořadí, s větším počtem mezivýsledků apod. Smyslem je poskytnout čtenáři stručné vyjádření úlohy pomocí čísel a její výsledek (v tabulce vyznačen tučně).

Tab. 2.2: Slovní úlohy pro 1. ročník s komentářem a řešením

	Charakteristika úlohy	**Řešení**
1/1	Na stole leželo 15 koláčů. Sedm jich bylo tvarohových, ostatní makové. Kolik koláčů bylo makových?	
	jednoduchá úloha na odčítání nebo dočítání, přechod přes desítku, žáci by mohli mít potíže s heterogenitou objektů – tvarohové x makové koláče, jedno z čísel zadáno slovem	15 – 7 = **8 (koláčů)**
1/2	Ivanka dostala k narozeninám 3 nové obrázkové knížky. Spočítala si, že teď už má 12 obrázkových knížek. Kolik knížek měla před narozeninami?	
	složitější úloha na odčítání, obsahuje antisignál „dostala“, přechod přes desítku, odehrává se ve dvou časech (minulost, přítomnost)	12 – 3 = **9 (knížek)**
1/3	Na hřišti si hrálo několik dětí. Aleš pozoroval, že v jedné chvíli pět dětí přišlo a dvě děti odešly. Bylo pak na hřišti více, nebo méně dětí? O kolik?	
	složitá úloha na odčítání, operátorová úloha – neznáme počáteční stav, zadání obsahuje dvě otázky, neobsahuje žádnou číslici	více dětí 5 – 2 = **3 (děti)**
1/4	Tomáš zjistil, že je o 5 cm větší než Mirek, ale o 2 cm menší než Lenka. Kdo je nejmenší a kdo je největší?	
	složitá operátorová úloha, ve které neznáme počáteční stav, náročná by mohla být také přítomností veličiny (cm)	nejmenší je **Mirek**, největší **Lenka**
1/5	Fotbalisté z Dolní Lhoty hráli letos 15 zápasů. Sedm zápasů vyhráli, čtyři prohráli a zbytek byl nerozhodně. Kolik zápasů hráli nerozhodně?	
	složená slovní úloha: je třeba více než jedné početní operace, pro některé řešitele může mít slovo „vyhráli“ antisignální povahu („je třeba sčítat 15 + 7“), bez znalosti kontextu možná obtížně řešitelná	15 – 7 – 4 = **4 (zápasy)**
1/6	Na prázdné parkoviště před dům přijelo v sobotu 8 aut, v neděli o 4 auta více než v sobotu. Kolik aut stálo na parkovišti, když žádné auto neodjelo?	
	složená slovní úloha vyžadující správné zřetězení početních úkonů, obsahuje operátor porovnání „o 4 auta více“	8 + (8 + 4) = **20 (aut)**

Tab. 2.3: Slovní úlohy pro 2. ročník s komentářem a řešením

	Charakteristika úlohy	**Řešení**
2/1	Sportovní soutěže v atletice se zúčastnilo 24 chlapců a 13 děvčat. Kolik dětí se zúčastnilo soutěže v atletice?	
	tradiční úloha na sčítání, heterogenní skupina objektů (dívky, chlapci, děti), dětem dobře známá situace	24 + 13 = **37 (dětí)**
2/2	Maruška měla v knihovničce 47 knížek. Jednu knížku půjčila Aničce, jednu Ivance a jednu Markétce. Sama má jednu rozečtenou knížku v aktovce. Kolik knížek má ve své knihovničce nyní?	
	mohla by se považovat za složenou úlohu, opakované odčítání jedné, čísla zadána slovy, slovní spojení „má rozečtenou“ by pro některé mohlo být signálem k přičítání (tedy antisignál)[27]	47 – 1 – 1 – 1 – 1 = = **43 (knížek)**
2/3	Turistického výletu se zúčastnilo 28 členů turistického oddílu a 23 dalších účastníků z řad rodičů a kamarádů. Kolik osob se zúčastnilo turistického výletu?	
	jednoduchá úloha na sčítání, heterogenní skupina objektů (členové, účastníci, osoby), přechod přes desítku	28 + 23 = **51 (osob)**
2/4	Do světového poháru horských kol nastoupilo 42 závodníků, ale 7 z nich mělo na trati neopravitelný defekt. Kolik závodníků dokončilo závod?	
	jednoduchá úloha na odčítání, obsahuje cizí slovo „defekt“, pro žáky pravděpodobně neznámé	42 – 7 = **35 (závodníků)**
2/5	Kouzelná rostlina Papoldea v červnu měřila o 9 cm víc než v lednu, ale o 7 cm méně než v prosinci. O kolik centimetrů povyrostla Papoldea během kalendářního roku?[28]	
	operátorová úloha, podobná úloze 1/4, numericky jednoduchá, ovšem náročná na porozumění, tři časové údaje (leden, červen, prosinec), všechna čísla v roli operátorů včetně hledaného výsledku, v úloze je antisignál „měřila víc“ a „méně než“, obsahuje neznámé slovo „Papoldea“, pro některé by mohlo být nesrozumitelné sloveso „povyrostla“	9 + 7 = **16 (cm)**
2/6	Házenkářky TJ Sokol prohrály svůj zápas 29 : 31, přestože první poločas vyhrály 15 : 12. Jak dopadl druhý poločas? Kolik branek ve druhém poločase daly a kolik dostaly?	
	náročná úloha vyžadující znalost kontextu, zejména způsob zápisu výsledku zápasů, složená úloha na odčítání, neklade nároky na řetězení, ale výběr správných dvojic čísel, možné neporozumění slovu „poločas“, přechod přes desítku	29 – 15 = 14 31 – 12 = 19 **14 : 19**

27 Slovní vyjádření „půjčit knížku“ je významově v jiné hladině než „mít rozečtenou knížku“, které na rozdíl od prvního obratu nemusí v daném kontextu vyvolat představu o úbytku knih. Že je třeba i tuto knihu odečíst, se řešitel dozvídá až z otázky, která specifikuje, že je třeba zjisit počet knih v knihovně, nikoliv počet knih, které má Maruška.

28 V úloze je zamlčený předpoklad, že se jedná o měsíce stejného roku. Vzhledem k tomu, že úloha nebyla zadávána v rámci testu, ale při rozhovoru, předpokládali jsme, že se kolem této okolnosti může rozvinout diskuse, při níž se význam vyjasní a z níž bude zřejmé, do jaké míry si žák snaží situaci představit.

2/7	Zuzanka v neděli večer počítala peníze. Zjistila, že má v pokladničce 67 korun. Odpoledne si koupila za 14 korun zmrzlinu a za 19 korun limonádu. Po obědě jí dědeček přidal ještě dvacetikorunu. Kolik měla Zuzanka našetřeno v pokladničce v neděli ráno?	
	úloha s antisignálními slovy „koupila“ a „přidal“, přechod přes desítku, řetězení početních operací, odehrává se v několika časech (večer, odpoledne, ráno), jedno číslo zadáno slovy	67 + 14 + 19 – 20 = = **80 (Kč)**
2/8	Lyžařského zájezdu se zúčastnilo 19 lyžařů. Kabinka má sedačky pro čtyři lyžaře. Kolik plných kabinek obsadili? Kolik lyžařů jelo v kabince, která nebyla úplně obsazena?	
	úloha na dělení či postupné odčítání (závisí na znalostech řešitele), číslo zadané slovem, dvě otázky – druhá z nich se ptá na zbytek při dělení	19 : 4 = **4 (plné kabinky)** 19 – 16 = **3 (lyžaři)**
2/9	Děti v odpolední družině vyráběly společný plakát s pampeliškami a fialkami. Každé dítě nalepilo na plakát tři pampelišky a čtyři fialky. Kolik květin měly děti na plakátu, když jich dnes bylo v odpolední družině jen 12?	
	úloha řešitelná násobením či opakovaným sčítáním, některá čísla zadána slovy, heterogenní skupina objektů (pampelišky, fialky, květiny)	(3 + 4) × 12 = **84 (květin)**

Tab. 2.4: Slovní úlohy pro 3. ročník s komentářem a řešením

	Charakteristika úlohy	**Řešení**
3/1	Anička koupila sýr za 17 Kč a pět housek po 3 Kč. Platila padesátikorunou. Kolik korun jí vrátila paní prodavačka?	
	tradiční složená slovní úloha vyžadující správné zřetězení početních operací, kromě dělení jsou nutné všechny základní početní operace, jedno z čísel zadáno slovně	50 – (17 + 5 × 3) = = **18 (Kč)**
3/2	V automobilce Škoda vyrobili v pátek 87 automobilů. Ve středu o 18 více než v pátek a v pondělí o 16 méně než ve středu. Kolik vozů vyrobili v pondělí?	
	složená slovní úloha vyžadující správné zřetězení početních úkonů, obsahuje tři různé časové údaje (pátek, středa, pondělí)	87 + 18 – 16 = = **89 (vozů)**
3/3	Čtyři kamarádi dostali společně sáček s bonbony. Rozdělili si jej tak, že každý dostal 7 bonbonů a 3 jim v sáčku zůstaly. Kolik bonbonů bylo celkem v sáčku?	
	složená úloha o dělení se zbytkem, ovšem pro vyřešení je nutno uvažovat obráceně, tedy násobit a následně sčítat, slovo „rozdělili“ může pro někoho být antisignálem (pokynem k dělení 7 : 3), číslo 4 zadáno slovem	7 × 4 + 3 = **31 (bonbonů)**
3/4	V autě je nádrž, do které se vejde 40 litrů benzínu. Tatínek cestoval do práce a cestou spotřeboval 2 litry benzínu. Odpoledne natankoval 29 litrů a tím byla nádrž naprosto plná. Kolik litrů benzínu měl v nádrži před cestou do práce?[29]	

29 V této úloze je zamlčený předpoklad, že tatínek jel do práce ráno a zpět se vracel odpoledne.

3/4	náročná složená úloha s dvěma antisignály („spotřeboval“, „natankoval“), čísla vystupují jako veličiny (litry), odehrává se ve dvou různých časech, kontext pravděpodobně mimo zkušenost žáků, zadání připouští různé interpretace (natankoval odpoledne téhož, nebo jiného dne?)	40 – 29 + 2 = = **13 (l)**
3/5	Autobusová linka č. 193 přijela na zastávku Nuselská radnice, kde čekalo 5 cestujících. Nejprve několik cestujících vystoupilo a pak tři cestující nastoupili. Na zastávce Palouček vystoupilo 5 cestujících a nastoupil pouze jeden. V autobuse teď sedělo 13 cestujících. Kolik jich na zastávce Nuselská radnice vystoupilo, když tam přijelo 18 cestujících?	
	náročná složená úloha s antisignálem (opět jen pro některé řešitele), obsahuje dva nadbytečné údaje (193 a „5 cestujících“), některá čísla jsou zadána slovem, počáteční stav je neznámý	18 – x + 3 – 5 + 1 = = 13 x = **4 cestující**
3/6	Studenti Zuzana a Petr pracují jako brigádníci v supermarketu Zlatý důl. Zuzana obdrží každý večer 800 Kč a Petr 900 Kč. Zuzana si koupila za čtvrtinu svého denního platu tričko, Petr za třetinu svého platu kopací míč. Komu zbyla větší suma na další útratu a o kolik?	
	složená úloha se zlomky, některá čísla zadána slovem (čtvrtina, třetina), porovnání	oběma zbylo **stejně** $\frac{3}{4}$ z 800 = 600 $\frac{2}{3}$ z 900 = 600

Tab. 2.5: Slovní úlohy pro 4. ročník s komentářem a řešením

	Charakteristika úlohy	**Řešení**
4/1	Tři kamarádi jeli na výlet, nejprve vlakem, pak autobusem. Za jízdenku na vlak zaplatil každý 18 Kč, za jízdenku na autobus 23 Kč. Kolik korun zaplatili celkem za jízdenky?	
	tradiční složená slovní úloha, kontext ve zkušenostech žáků, obsahuje veličiny (Kč), jedno z čísel zadáno slovem, vyžaduje správné řetězení početních operací (sčítání a násobení)	3 × 18 + 3 × 23 = = **123 (Kč)**
4/2	Na farmě sebrali za tři dny 945 vajec. První den sebrali 213 vajec, druhý den o 40 vajec méně než první den. Kolik vajec sebrali třetí den?	
	složená slovní úloha vyžadující správné zřetězení výpočetních kroků, přítomna velká čísla, nelze je snadno modelovat ani zjednodušit, může pro někoho obsahovat antisignál „za tři dny“, který lze vnímat jako „dohromady“, tedy vést ke sčítání	213 – 40 = 173 945 – (213 + 173) = = **559 (vajec)**
4/3	Jitka přečetla o jarních prázdninách knihu, která měla 650 stránek. V pondělí přečetla 50 stran, ostatní dny (od úterý do neděle) četla každý den stejný počet stran. Kolik stran přečetla v pondělí a v úterý dohromady?	
	složená úloha, zahrnuje všechny základní početní operace kromě násobení, kontext známý, ale méně reálný, otázka nemusí dávat žákům smysl, je umělá, násilná, což by mohlo vést k odpovědím na jinou otázku, kterou si žák v rámci řešení spontánně stanoví, jedno číslo dáno implicitně (6 dní v týdnu)	(650 – 50) : 6 = 100 50 + 100 = **150 (stran)**
4/4	V továrně vyrobili dělníci na jedné směně 6 600 součástek, na druhé směně o šestinu součástek více. Všechny součástky pak zabalili do krabic po jedné stovce součástek. Kolik krabic bylo připraveno na prodej?	