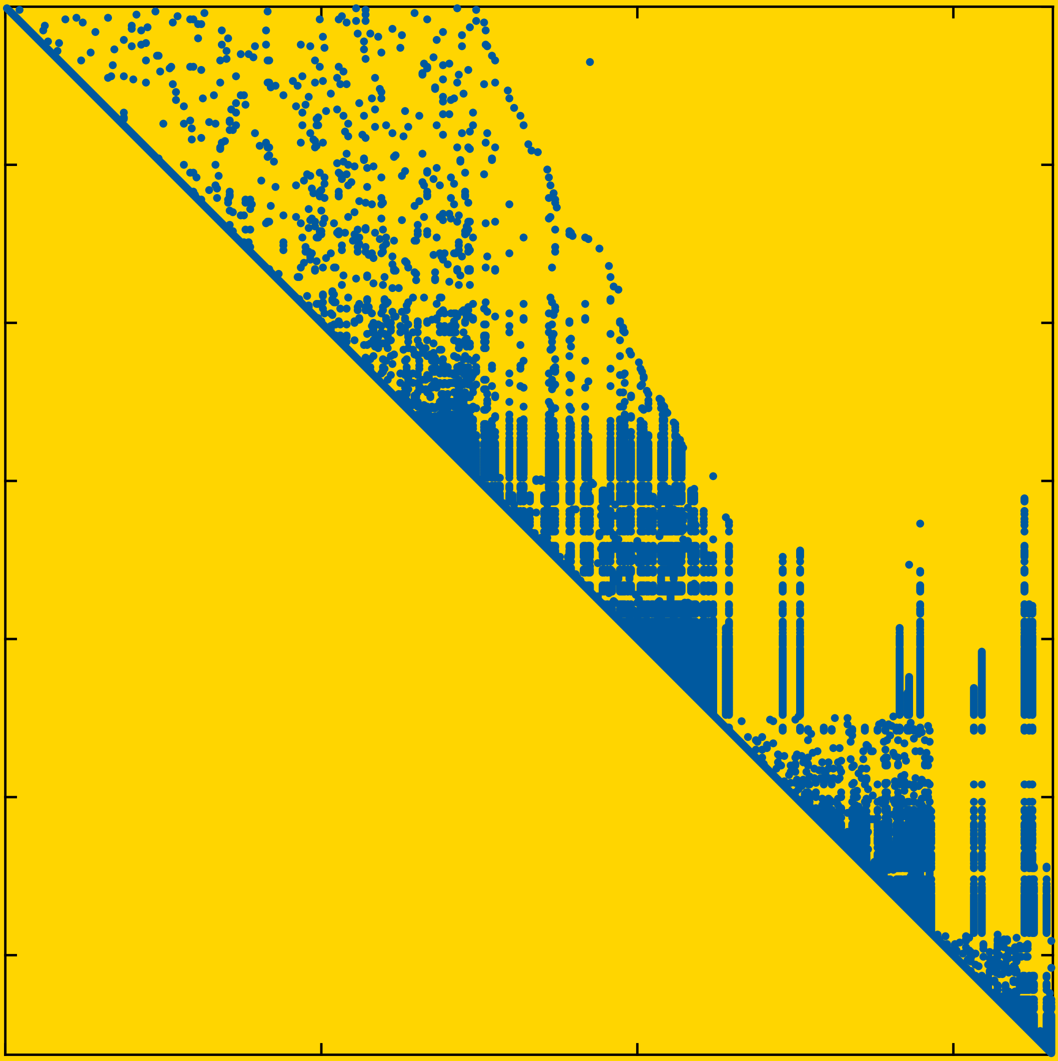
VÝPISKY Z LINEÁRNÍ ALGEBRY OČIMA NEMATEMATIKA

MARTIN PLEŠINGER

KAROLINUM



Výpisky z lineární algebry očima nematematika

Martin Plešinger

Recenzovali:
doc. Ing. Marek Brandner, Ph.D.
doc. RNDr. Antonín Jančařík, Ph.D.

Financováno Evropskou unií NextGenerationEU

Národní plán obnovy

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

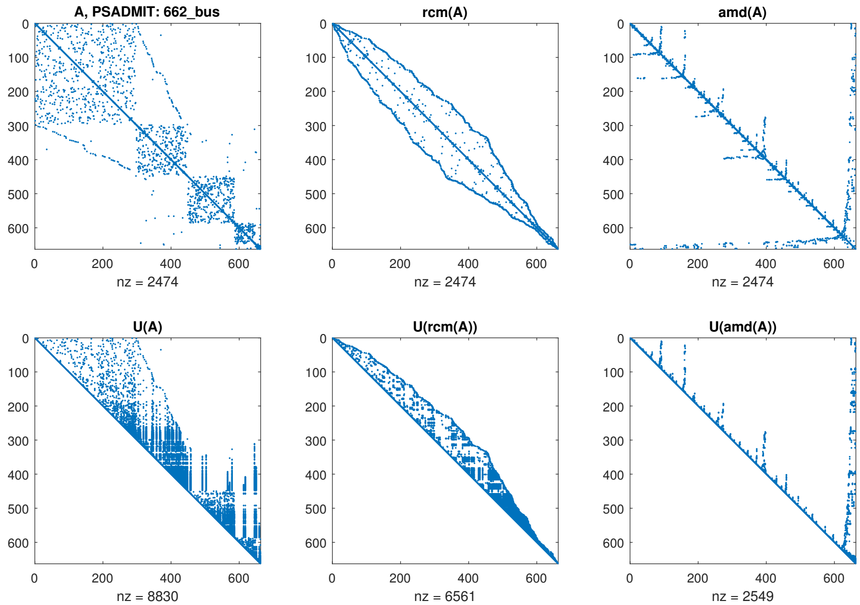
Publikace byla vydána za podpory Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy a Národního plánu obnovy v rámci projektu Transformace pro VŠ na UK (reg. č. NPO_UK_MSMT-16602/2022).

Vydala Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum
Praha 2023
Jazyková korektura Silvie Mitlenerová
Obálka Jan Šerých
Sazba Martin Plešinger
Vydání první

ISBN 978-80-246-4096-9
ISBN 978-80-246-5554-3 (pdf)

Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum

www.karolinum.cz
ebooks@karolinum.cz



První řádek: Struktura nenulových prvků matice `662_bus` modelu energetické přenosové sítě `PSADMIT` a dvě její (simultánní tj. řádkové i sloupcové) permutace spočtené algoritmy *Reverse Cuthill–McKee* a *Approximate minimum degree*. *Druhý řádek*: LU-rozklady (resp. faktory $U = L^{\mathsf{T}}$) těchto matic. Matice převzata z Matrix Marketu [20] z Harwell-Boeing Collection [19], `https://math.nist.gov/MatrixMarket/data/Harwell-Boeing/psadmit/psadmit.html`.

Obrázek 8.4 na straně 262 namaloval

Roland Havran, `https://cz.linkedin.com/in/roland-havran-49905912b`.

Obsah

Co už možná známe, místo řečí úvodem

Tento text vznikal v době koronavirové epidemie a kvůli (díky) této epidemii, totiž jako podpůrný text pro dočasně zavedené distanční studium. Epidemie svět zastihla v březnu roku 2020, tedy v letním semestru akademického roku 2019/2020. Text se však váže k předmětu, který je vyučovaný v semestru zimním, a vznikal tak až v akademickém roce 2020/2021. Celý úvodní kurz sestávající ze dvou předmětů zaměřených nejprve na lineární algebru v zimním a následně obecnou algebru v letním semestru je tak pokryt dvěma na sebe navazujícími texty. Paradoxem se stalo, že text navazující vznikal jako první a text předcházející jako druhý. Skutečné slovo úvodem k oběma textům (knihám) je proto k nalezení ve druhém svazku [13]. Místo dalších řečí úvodem se zde raději zaměříme na připomenutí útržků látky z lineární algebry, které možná již známe.

Martin Plešinger
v Liberci, v říjnu l. p. 2020

Poděkování bdělým očím

V první řadě bych rád poděkoval *Silvii Mitlenerové*, která ochotně věnovala svůj drahocenný čas opravám tohoto výtvoru namísto knih literárně hodnotnějších. Dále bych rád poděkoval studentkám a studentům, kteří mne intenzivně zahrnovali seznamy chyb nalezených v obou narychlo vznikajících textech. Jmenovitě *Věnceslavu Chumchalovi*, *Markétě Jánské* a *Filipu Zadražilovi*. Řadě dalších očí, na které jsem bohužel zapomněl, se omlouvám.

Martin Plešinger
v Liberci, v říjnu l. p. 2021

A co že tedy už známe?

Některé pojmy nebo objekty, které spadají do obsahu předmětu, resp. studia té části matematiky, která se nazývá *lineární algebra*, bezesporu známe.

Lineární funkce a lineární lomená funkce

Již na základní a střední škole jsme se setkali např. s pojmem *lineární funkce*, případně *lineární lomená funkce*

$$f(x) = a \cdot x + b, \qquad \text{resp.} \qquad f(x) = \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d},$$

kde a, b, c a d jsou nějaká čísla. Pozoruhodné je, že ani jedna z obou funkcí není obecně lineární, neboť *zobrazení* $F(x)$ je *lineární*, pokud

$$F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2) \qquad \text{a} \qquad F(x \cdot \alpha) = F(x) \cdot \alpha.$$

Výše zmíněné funkce jsou tedy lineární pouze pokud $b = 0$, $c = 0$, tedy pokud $f(x) = a \cdot x$, resp. $f(x) = \frac{a}{d} \cdot x$. Ostatně proto také ono $a \cdot x$ v první z obou funkcí nazýváme *lineárním členem* a ono b pak členem *konstantním.*

Co o lineárních lomených funkcích *pravděpodobně nevíme*, ač je to v kontextu našeho právě započnuvšího kurzu nesmírně pozoruhodné, je skládání těchto funkcí. Uvažujme

$$f(x) = \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d} \qquad \text{a} \qquad g(x) = \frac{k \cdot x + q}{r \cdot x + s},$$

jejich složeninou je

$$f(g(x)) = \frac{a \cdot \frac{k \cdot x + q}{r \cdot x + s} + b}{c \cdot \frac{k \cdot x + q}{r \cdot x + s} + d} = \frac{(a \cdot k + b \cdot r) \cdot x + (a \cdot q + b \cdot s)}{(c \cdot k + d \cdot r) \cdot x + (c \cdot q + d \cdot s)}.$$

Zapíšeme-li koeficienty takových funkcí do *matic* 2×2 (kdo se s pojmem matice dosud nesetkal, může s klidným srdcem přeskočit na další odstavec) tak, že

$$f(x) \longmapsto M_f = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad g(x) \longmapsto M_g = \begin{bmatrix} k & q \\ r & s \end{bmatrix},$$

pak zřejmě

$$f(g(x)) \longmapsto M_f \cdot M_g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot k + b \cdot r & a \cdot q + b \cdot s \\ c \cdot k + d \cdot r & c \cdot q + d \cdot s \end{bmatrix}.$$

Jejich skládání je tedy v jistém smyslu lineární.

Lineární zobrazení stejně jako práce s maticemi bude v tomto kurzu naším denním chlebem.

Lineární rovnice a soustava lineárních rovnic

Dalším pojmem, který jistě známe již ze základní školy, je *lineární rovnice*, tedy rovnice tvaru

$$a \cdot x = d,$$

případně *soustava* (dvou) *lineárních rovnic* (pro dvě neznámé)

$$\begin{aligned} a \cdot x + b \cdot y &= d, \\ k \cdot x + q \cdot y &= s. \end{aligned}$$

V prvním případě víme, že když $a \neq 0$, pak má rovnice řešení $x = \frac{d}{a}$. Ve druhém případě tušíme, že existence řešení nějakým způsobem souvisí s čímsi, co nazýváme *nezávislost* (přesněji *lineární nezávislost*) *levých stran* obou rovnic. Ti, kdo se setkali na střední škole s maticemi, také nejspíš vědí, že právě tato soustava se dá pomocí matic napsat jako jedna rovnice o jedné neznámé

$$\begin{bmatrix} a & b \\ k & q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ s \end{bmatrix},$$

jenže rovnice vektorová, jejíž neznámou je vektor o dvou složkách.

Důležité však je, že i ta jediná rovnice o jedné neznámé $a \cdot x = d$ vykazuje tři různé typy chování:

- Podmínkou $a \neq 0$ jsme si zajistili *existenci* výše zmíněného *jednoznačného řešení*. Rovnice však může mít řešení i jindy.
- Pokud $a = 0$ a zároveň $d \neq 0$. Obě strany rovnice můžeme nenulovým číslem d vydělit a dostáváme tak rovnici

  $$0 \cdot x = 1.$$

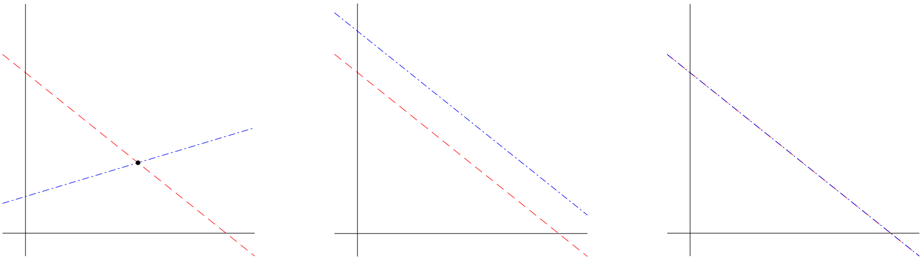
  Snadno ověříme, že žádné x, pro které by se levá strana rovnala pravé, neexistuje. Rovnice tedy *nemá řešení*.
- Pokud $a = 0$ a zároveň $d = 0$, dostáváme rovnici

  $$0 \cdot x = 0.$$

  Opět snadno ověříme, že je splněna pro jakékoliv x. Rovnice má tedy *nekonečně mnoho řešení*.

Zcela analogicky můžeme rozebrat i výše uvedenou soustavu, to však provedeme až v dalším odstavci.

Klíčový pojem lineární (ne)závislosti, pojem vektoru, studium existence a jednoznačnosti řešení soustav (mnoha) lineárních rovnic (o mnoha neznámých), ale i hledání těchto řešení bude také náplní tohoto kurzu.



Obrázek 1: Tři podstatně různé možnosti vzájemné polohy dvou přímek v rovině. Zleva: *různoběžné*, *rovnoběžné různé*, *rovnoběžné identické*.

Vybrané objekty analytické geometrie

V přídavném jménu *lineární* slyšíme latinský základ *linea*, nebo alespoň anglické slovíčko *line* — *přímka*. To je první z objektů analytické geometrie, který nás bude zajímat. Ze střední školy jistě známe *obecnou rovnici přímky* (*v rovině*)

$$\mathscr{p} : a \cdot x + b \cdot y - d = 0, \qquad \text{přičemž požadujeme aby} \quad a \neq 0 \quad \text{nebo} \quad b \neq 0.$$

Přímka je pak konkrétně množina bodů roviny splňující tuto rovnici. Pokud chceme všechny tyto body nalézt, rovnici prostě vyřešíme, neboli přejdeme k *parametrickému popisu* přímky. Je-li např. $a \neq 0$, pak

$$\mathscr{p} : \begin{cases} x = x(\tau) = b \cdot \tau + \frac{d}{a}, \\ y = x(\tau) = -a \cdot \tau, \end{cases}$$

kde τ je onen parametr. Vykreslením bodů $[x(\tau), y(\tau)]$ pro všechny možné hodnoty parametru přímka vznikne.

Pokud se podíváme na soustavu rovnic z předchozí sekce, vidíme, že tato soustava rovnic není nic jiného, než soubor dvou přímek v rovině

$$\mathscr{p} : a \cdot x + b \cdot y - d = 0,$$
$$\mathscr{q} : k \cdot x + q \cdot y - s = 0.$$

Na obrázku vidíme tři situace, podstatně různé možnosti, které mohou nastat ve *vzájemné poloze dvou přímek v rovině*. Tyto možnosti odpovídají existenci jednoznačného řešení, žádného řešení a nekonečně mnoha řešení, která v rovině tvoří přímku.

V případě soustavy může být situace ještě nepatrně složitější. Některá, nebo dokonce žádná z rovnic nemusí rovnicí přímky. Snadno si rozmyslíme, že kdykoliv soustava obsahuje alespoň jednu rovnici tvaru $0 \cdot x + 0 \cdot y = 1$, soustava nemá žádné řešení. Zbývají situace, kdy (i) obsahuje soustava jednu rovnici přímky a jednu nulovou rovnici $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$, resp. (ii) dvě nulové rovnice. V obou těchto případech má soustava nekonečně mnoho řešení tvořících buď (i) přímku, nebo (ii) celou rovinu.

Z analytické geometrie ale známe i další objekty (rovné podobně jako přímky), které nás budou zajímat, například *roviny*. Připomeňme *obecnou rovnici roviny v prostoru*

$$\mathcal{R} : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z - d = 0,$$

přičemž opět požadujeme, aby alespoň jeden z koeficientů a, b, c byl nenulový. Jak získat parametrický popis roviny, stejně jako zopakování si pojmů jako je *normálový vektor* a *směrové vektory*, již ponecháváme na čtenáři. Nicméně je zřejmé, že po formální stránce můžeme s rovnicí nakládat podobně jako v případě přímky.

Analogicky můžeme uvažovat i soubor dvou rovin v prostoru

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &: a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z - d = 0, \\ \mathcal{S} &: k \cdot x + q \cdot y + r \cdot z - s = 0, \end{aligned}$$

neboli soustavu dvou rovnic o třech neznámých. Rozmyslet si, jakou vzájemnou polohu mohou mít dvě roviny v prostoru, také již ponecháváme na čtenáři. Každopádně pokud roviny nejsou rovnoběžné, protínají se a jejich průnikem je přímka. Soubor dvou rovin, resp. soustava jejich obecných rovnic pak představuje něco jako obecnou rovnici přímky v prostoru; jak nalézt parametrický popis takové přímky opět ponecháváme na čtenáři.

Formálně jsme opět zabředli do řešení soustav lineárních rovnic. Nicméně geometrická představa může dát dobrý vhled do toho, co se při řešení takové soustavy děje a kam míříme, a naopak lineární algebra nám dává k dispozici robustní aparát, jak analyticko-geometrické úlohy řešit.

Detailněji se podíváme na to, jak lze zavést v prostoru vzdálenosti a úhly, abychom u podobných úloh dokázali své odpovědi i kvantifikovat — jaké úhly svírají objekty nerovnoběžné, jaké jsou vzdálenosti rovnoběžných objektů.

Další doporučená literatura

Ve zbytku úvodu se pokusíme krátce doporučit vybranou literaturu. Literatura je rozdělena do tří ne příliš ostře vymezených oddílů. První tři oddíly zahrnují literaturu, řekněme, více základní, odpovídající úvodním kurzům lineární algebry. Tyto oddíly se pak liší spíše formálně, tedy formou: totiž při pohledu na publikaci z prvního oddílu si čtenář pravděpodobněji řekne „ejhle kniha“, zatímco při pohledu na publikaci z druhého pravděpodobněji „ejhle skriptum“, o třetím není třeba dlouze diskutovat. V oddílu posledním jsou pak vybrané publikace obsahově v jistém smyslu navazující na publikace základní, zaměřené zejména na hlubší studium pojmu *matice*.

Základní literatura (knihy)

[1] J. Bečvář: *Lineární algebra*, MatfyzPress (2019).

[2] L. Bican: *Lineární algebra a geometrie*, Academia (2002).

[6] M. Hladík: *Lineární algebra (nejen) pro informatiky*, MatfyzPress (2019).

[11] L. Motl, M. Zahradník: *Pěstujeme lineární algebru*, Karolinum (2003).

Základní literatura (skripta)

[3] Z. Dostál, V. Vondrák: *Lineární algebra*, VŠB-TUO & ZČU (2012).

[12] P. Olšák: *Úvod do algebry zejména lineární*, FEL ČVUT (2007).

[16] J. Pytlíček: Cvičení z algebry a geometrie, FJFI ČVUT (2008).

[15] J. Pytlíček: Lineární algebra a geometrie, FJFI ČVUT (2008).

Základní literatura (neliteratura)

[17] G. Sanderson (3Blue1Brown): *Essence of linear algebra*, YouTube (2016). YouTube: list=PLZHQObOWTQDPD3MizzM2xVFitgF8hE_ab

[18] G. Strang: *Lectures on Linear Algebra*, MIT & YouTube (2009). YouTube: list=PL49CF3715CB9EF31D

Navazující literatura

[4] E. J. Duintjer Tebbens, I. Hnětynková, M. Plešinger, Z. Strakoš, P. Tichý: *Analýza metod pro maticové výpočty. Základní metody*, MatfyzPress (2012).

[5] F. R. Gantmacher: *The theory of matrices*, AMS (2000).

[7, 8] R. A. Horn, C. R. Johnson: *Matrix analysis* & *Topics in matrix analysis*, CUP (2011, 2013).

Kapitola 1

Základní stavební kameny — vektory & matice

Po celou dobu tohoto kurzu se budeme setkávat se dvěma speciálními matematickými objekty, budou to *vektor* a *matice*, jak již napovídá název kapitoly. Než se však dostaneme k alespoň nějaké prvotní konkretizaci těchto lineárně-algebraických pojmů, připomeneme si několik pojmů množinových, resp. číselných. Spíše než připomenutí se však bude jednat o jakési vágní vymezení.

1.1 Několik slov k množinám a uspořádaným množinám — n-ticím

S pojmem *množina* budeme pracovat poměrně naivním způsobem, bude pro nás synonymem souhrnu, nebo souboru objektů; bude jakýmsi pytlíčkem, který může být prázdný, nebo může obsahovat nějaké konkrétně vyjmenované nebo dostatečně jasně specifikované objekty. Přesnějším vymezením pojmu se zabývá teorie množin. Ukazuje se totiž, že naše naivní vymezení může vést k různým nepříjemným paradoxům (viz např. Russelův paradox).

Představa množiny jako pytlíčku s objekty nicméně dobře vystihuje jeden podstatný jev — neuspořádanost prvků množiny. Kromě množin ale budeme často potřebovat pracovat s jakosi uspořádanou variantou (můžeme si představit, že objekty z pytlíčku vyndáváme, což činíme v nějakém konkrétním pořadí). Základním stavebním prvkem bude tzv. *uspořádaná dvojice*. Uspořádanou dvojici zpravidla značíme (a, b), a můžeme ji definovat např. jako množinu

$$(a, b) = \Big\{ \{a\}, \big\{\{a\}, b\big\} \Big\}.$$

Tedy jako množinu se dvěma prvky — opět množinami: jedna z nich je přitom vždy jednoprvková a obsahuje první prvek uspořádané dvojice, druhá pak specifikuje druhý prvek uspořádané dvojice.

Úloha 1.1. *Čtenář si rozmyslí, proč a k čemu jsou jednotlivé množinové závorky uvedené v definici uspořádané dvojice vhodné. Dobré je se podívat např. na uspořádanou dvojici* (a, a)*, případně* $(a, \{a\})$*.*

Dále je dobré si rozmyslet, jak analogickým způsobem zapsat uspořádanou trojici.

1.1.1 Kartézský součin množin

Připomeňme, že máme-li dvě množiny, řekněme

$$\mathscr{M} = \{1, 2, 3\}, \quad \mathscr{N} = \{A, B\},$$

o třech, resp. dvou prvcích, můžeme zkonstruovat jejich tzv. *kartézský součin*, tedy množinu označovanou $\mathscr{M} \times \mathscr{N}$, která bude obsahovat všechny *uspořádané dvojice* takové, kde první prvek dvojice je z první množiny a druhý z druhé, tedy

$$\begin{aligned} \mathscr{M} \times \mathscr{N} = \{ &(1, A),\ (2, A),\ (3, A), \\ &(1, B),\ (2, B),\ (3, B) \}. \end{aligned}$$

Množina nemá nijak předepsané pořadí prvků, nicméně zde jsme je záměrně vypsali do tvaru jakési „tabulky“, do jejíhož horního záhlaví bychom mohli zapsat prvky množiny $\mathscr{M}$ a do jejíhož levého záhlaví bychom mohli zapsat prvky množiny $\mathscr{N}$. Speciálně kartézský součin množiny $\mathscr{M}$ se sebou samou budeme značit

$$\mathscr{M}^2 = \mathscr{M} \times \mathscr{M}.$$

Zcela analogicky můžeme uvažovat kartézský součin většího počtu množin. Pokud budeme mít navíc ještě množinu

$$\mathscr{K} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\},$$

můžeme uvažovat kartézský součin tří množin jako množinu

$$\begin{aligned} \mathscr{M} \times \mathscr{N} \times \mathscr{K} = \{ &(1, A, \alpha),\ (2, A, \alpha),\ (3, A, \alpha), (1, B, \alpha),\ (2, B, \alpha),\ (3, B, \alpha), \\ &(1, A, \beta),\ (2, A, \beta),\ (3, A, \beta), (1, B, \beta),\ (2, B, \beta),\ (3, B, \beta), \\ &(1, A, \gamma),\ (2, A, \gamma),\ (3, A, \gamma), (1, B, \gamma),\ (2, B, \gamma),\ (3, B, \gamma), \\ &(1, A, \delta),\ (2, A, \delta),\ (3, A, \delta), (1, B, \delta),\ (2, B, \delta),\ (3, B, \delta) \} \end{aligned}$$

všech *uspořádaných trojic*. Kdybychom zde chtěli prvky kartézského součinu srovnat do pomyslné „tabulky“ jako v předchozím případě, tabulka by byla trojrozměrná.

Hravě si však rozmyslíme, že na kartézský součin $\mathscr{M} \times \mathscr{N} \times \mathscr{K}$ se můžeme, při troše dobré vůle, dívat jako na

$$\mathscr{M} \times (\mathscr{N} \times \mathscr{K}), \quad \text{nebo} \quad (\mathscr{M} \times \mathscr{N}) \times \mathscr{K}.$$

Je zde formální rozdíl, který však budeme zanedbávat. Řekli jsme, že prvky původního součinu uspořádané trojice (které můžeme definovat přímo, analogicky uspořádaným dvojicím), prvky druhých dvou uspořádané dvojice; např.

$$(1, A, \alpha) \qquad \text{versus} \qquad (1, (A, \alpha)), \quad \text{resp.} \quad ((1, A), \alpha).$$

Tímto způsobem nicméně můžeme kartézské součiny vyšších počtů množin, resp. uspořádané n-tice ($n > 2$) alternativně *rekurzivně definovat.* Tedy uspořádanou trojici $(1, A, \alpha)$ formálně ztotožnit např. právě s uspořádanou dvojicí $(1, (A, \alpha))$, jejímž prvním prvkem je 1 a druhým prvkem uspořádaná dvojice (A, α).

Tak jako v případě součinu dvou množin můžeme i nyní kartézský součin, jsou-li všechny součinitele toutéž množinou, zapsat pomocí symbolické mocniny, tedy

$$\mathscr{M}^3 = \mathscr{M} \times \mathscr{M} \times \mathscr{M}.$$

Vezmeme-li v úvahu naše formální ztotožnění uspořádaných trojic se speciálními uspořádanými dvojicemi, můžeme také psát např.

$$\mathscr{M}^3 = (\mathscr{M} \times \mathscr{M}) \times \mathscr{M} = \mathscr{M}^2 \times \mathscr{M}.$$

Položíme-li navíc $\mathscr{M}^1 = \mathscr{M}$ (pozn. že někdy též pracujeme s nulovou mocninou $\mathscr{M}^0 = \varnothing$, která reprezentuje prázdnou množinu), můžeme rekurzivně zavést obecnou *přirozenou kartézskou mocninu* množiny

$$\mathscr{M}^{n+1} = \mathscr{M}^n \times \mathscr{M}, \qquad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Množina $\mathscr{M}^n$ je tedy množinou všech uspořádaných n-tic prvků z $\mathscr{M}$.

1.1.2 Některé číselné množiny

Na závěr tohoto kratičkého exkurzu do světa kartézských součinů se velmi stručně podíváme na množiny, se kterými budeme míti tu čest. V závěru předchozího odstavce zaznělo slovo *přirozená* (mocnina) a ve vzorečku se objevil dosud neznámý symbol $\mathbb{N}$. Tím budeme, jak asi tušíme, značit tzv. *přirozená čísla.* Jejich nepatrně detailnějšímu vymezení se budeme věnovat v druhé části tohoto textu (tj. v letním semestru). Zde si vystačíme s tím, že absolvent maturitního oboru má pojem přirozených čísel alespoň nějak vybudovaný. Jsou to čísla, jimiž počítáme objekty. Poznamenejme však, že se obecně můžeme setkat (i mezi matematiky) s různým názorem na to, zda nula do přirozených čísel patří, či nikoliv. Pro tento účel, a bude-li to pro výklad nezbytné, budeme rozlišovat množiny

$$\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \ldots\} \qquad a \qquad \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Prostý symbol $\mathbb{N}$ tedy budeme využívat tam, kde bude jedno, zda v přirozených číslech máme, nebo nemáme nulu, resp. tam, kde to bude z kontextu jednoznačně jasné. Tato čísla budeme používat zejména pro indexování související s velikostí kartézských mocnin (jak bylo naznačeno výše).

Kartézské mocniny však nebudeme konstruovat nad výše zmíněnou a ne příliš zajímavou množinu $\mathscr{M}$, ale nejčastěji nad množinu *reálných čísel*, kterou budeme značit $\mathbb{R}$, případně nad množinou *komplexních čísel*, kterou budeme značit $\mathbb{C}$. Připomeňme, že

$$\mathbb{C} = \{a + b \cdot \mathbf{i} \,:\, a, b \in \mathbb{R}\}, \qquad \text{kde} \quad \mathbf{i}^2 = -1.$$

Tyto dvě množiny jsou pro nás zajímavé zejména proto, že jsou dostatečně *úplné*. Libovolné dva prvky těchto množin (dvě čísla) umíme sečíst a vynásobit, ke každému číslu máme k dispozici číslo opačné a k nenulovému číslu máme i převrácenou hodnotu. V obou množinách tedy kromě sčítání a násobení umíme také odečítat a dělit (nenulovým číslem). Takové množiny, jak uvidíme později (v druhé části textu), nazýváme *tělesa* (resp. *algebraická tělesa*), to však teď není důležité.

Při některých speciálních příležitostech sáhneme výjimečně i po množině *celých čísel*

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\},$$

resp. *racionálních čísel*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,:\, p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}.$$

S přesnějším vymezením zejména racionálních čísel se opět setkáme až v druhé části textu. Na závěr poznamenejeme, že v racionálních číslech také umíme provádět základní čtyři operace (jsou tedy tělesem). Protože však neobsahují řadu čísel, která se nám budou často hodit — typicky odmocniny ($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, …, $\sqrt[3]{2}$, …, $\sqrt[17]{13}$, …), ale i další užitečná čísla (Ludolfovo číslo π, tj. poměr obvodu a průměru kruhu, Eulerovo číslo e, tj. základ přirozených logaritmů, atd.) —, budeme se jim raději vyhýbat.

1.2 Vektory

Pojem vektoru je nám jistě dobře známý již ze střední (částečně možná i ze základní) školy, a to hned v několika předmětech.

1.2.1 Vektory v analytické geometrii

S vektorem jsme se setkali speciálně v analytické geometrii. Máme-li např. zadanou *přímku* $\mathscr{p}$ v rovině *obecnou rovnicí*, případně *parametricky*,

$$\mathscr{p} \,:\, 5 \cdot x - 7 \cdot y + 4 = 0, \qquad \text{resp.} \qquad \mathscr{p} \,:\, \begin{cases} x = 7 \cdot \tau + 2 \\ y = 5 \cdot \tau + 2 \end{cases}, \quad \text{kde} \quad \tau \in \mathbb{R},$$

umíme nalézt a víme co jsou tzv. *směrový* a *normálový vektor*

$$\vec{s} = (7, 5) \qquad \text{a} \qquad \vec{n} = (5, -7)$$

této přímky.

Úloha 1.2. *Za domácí úkol čtenáři ponecháváme, aby si rozmyslel a zopakoval, jak spolu obecný a parametrický popis přímky souvisí a jak oba souvisejí s normálovým a směrovým vektorem.*

Tento jednoduchý příklad se týkal přímky v rovině. Je dobré si také rozmyslet, jak vypadá obecná rovnice roviny v prostoru, jak případně vypadá její parametrický popis a jaký význam zde má normálový vektor a případně směrové vektory.

Na závěr je také dobré si rozmyslet, jak lze popsat přímku v prostoru. Napovíme, že jednodušší je zde použít parametrický popis, je však dobré si rozmyslet proč. Dále napovíme, že přímku v prostoru mohu zkonstruovat např. tak, že si vezmu dvě nerovnoběžné roviny — jejich průnikem je právě přímka.

Vektorem tedy v tomto případě byla uspořádaná dvojice (reálných) čísel. Jakási „šipka“, která určovala např. směr přímky. Kromě vektorů jsme se v analytické geometrii setkali ještě s jinými uspořádanými dvojicemi, a sice body (roviny, prostoru, atp.). Výše zmíněná přímka p jistě prochází bodem

$$B = [x_B, y_B] = [2, 2],$$

jak snad snadno ověříme např. dosazením souřadnic x_B a y_B tohoto bodu za x a y do obecné rovnice přímky.

Protože přímka sama o sobě je množinou všech bodů $P = [x, y]$ roviny, které splňují její rovnici, můžeme její výše uvedený parametrický popis zapsat i neparně kompaktněji

$$P = \vec{s} \cdot t + B, \quad \text{kde} \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

v rozepsaném tvaru

$$[x, y] = (7, 5) \cdot t + [2, 2]. \quad \text{kde} \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

V zápisu zde formálně rozlišujeme vektory $(\cdots)$ a body $[\cdots]$, vidíme však, že je umíme násobit číslem τ a jakýmsi způsobem sčítat. Tedy speciálně k bodu B umím přičíst vektor $\vec{s} \cdot \tau$ a dostanu tím jiný bod P.

Na jednu stranu intuitivně chápeme, že bod („místo“ v prostoru) není vektor („šipka“ mířící odněkud někam), na druhou stranu tušíme, že když body nahradíme „šipkami“ mířícími z počátku souřadnicového systému právě na ono „místo“, kde bod leží, bude vše fungovat naprosto stejně. Body tedy můžeme také považovat za vektory v jistém slova smyslu.

1.2.2 Vektory ve fyzice

Zcela jistě jsme s vektory setkali také ve fyzice. Vektorem, resp. vektorovou veličinou zde je např. síla nebo rychlost. Jsou to fyzikální veličiny, které (na rozdíl např. od teploty nebo energie) jsou jakýmsi způsobem „bohatší“. Zpravidla je do nákresů malujeme jako šipky, čímž chceme znázornit, že mají:

- nějaké *působiště* (místo, kde je šipka uchycena; kde např. ona síla působí)

- *velikost* (šipka má nějakou délku),
- *směr* (šipka leží na nějaké přímce),
- *orientaci* (šipka dané velikosti, směru a působiště může mít ještě dvě různé orientace, kam míří),

přičemž rozlišení posledních dvou vlastností můžeme považovat spíše za formální a v obecném jazyce se na něj příliš nehledí (je ale dobré o něm vědět).

Toto fyzikální zavedení vektorů pro nás nebude příliš vhodné. Snadno ověříme, že ne každý vektor bude tyto čtyři body splňovat. Ostatně z fyziky např. víme, že těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu právě tehdy, když je výslednice sil na něj působících nulová. Sčítáním vektorů sil tedy v takovém případě dospějeme k nulovému vektoru. Tedy k vektoru, jehož velikost je nulová. Jaký je pak ale jeho směr? A jaká orientace? Stejně tak bychom se mohli ptát i po jeho působišti (zde by byla zřejmě v těžišti, nicméně nulová síla může na těleso působit i kdekoliv jinde, její působení nemá na těleso žádný efekt).

1.2.3 Vektory jako uspořádané n-tice

S využitím pohledu analyticko-geometrického i fyzikálního můžeme svou představu vektoru ztotožnit spíše s oněmi body v rovině (prostoru, ...), resp. s „šipkami“ mířícími z počátku souřadnicového systému (tedy s působištěm v tomto počátku) k těmto bodům. V případě potřeby budeme samozřejmě umět vektor z počátku „utrhnout“ a posunout si jeho působiště, kamkoliv budeme potřebovat (např. jako směrový vektor přímky). Technicky tak můžeme vektory v rovině zapisovat jako uspořádané dvojice, v prostoru jako uspořádané trojice atp. Formálně zavedeme obecný vektor jako uspořádanou n-tici v následující definici. Ještě předesíláme, že narozdíl od doposud užívaného způsobu zápisu uspořádaných dvojic a trojic budeme vektory zapisovat do sloupečku.

Definice 1.1 (Aritmetický vektor)**.** *Aritmetickým vektorem délky $n \in \mathbb{N}_+$ nazveme uspořádanou n-tici reálných, resp. komplexních čísel,*

$$v = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \vdots \\ \nu_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \ \textit{resp. } \mathbb{C}^n.$$

Číslo $\nu_j \in \mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$, $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ nazýváme j-tým prvkem, případně j-tou složkou vektoru.

Přízviskem *aritmetický* vektor bychom jednak rádi naznačili to, že se časem setkáme ještě s jiným vektorem (resp. jinou definicí vektoru), a sice s mnohem obecnějším vektorem *algebraickým* (viz kapitolu 6). Druhým důvodem, proč to v definici uvádíme, je, abychom neměli dvě různé definice stejného pojmu, totiž vektoru. Ve vlastním textu budeme nicméně hovořit téměř výhradně pouze o vektoru. Že se jedná o vektor aritmetický, budeme zdůrazňovat jen tam, kde to bude vhodné nebo nezbytně nutné.

Na závěr poznamenejme, že budeme většinu času (tj. dokud to bude možné) pracovat s vektory reálnými. Stejné úvahy však lze provádět i s vektory komplexními. Do komplexního světa budeme utíkat v případě, kdy zde bude nějaký podstatný rozdíl oproti světu reálnému, nebo pokud to bude nutné.

1.3 Operace s vektory

Již na příkladu přímky v analytické geometrii, přesněji zápisu (1.1)–(1.2) vidíme, že bude užitečné naučit se s vektory základním způsobem manipulovat. Mezi základní operace, jak z příkladu tušíme, bude patřit:

- součet dvou vektorů a
- součin vektoru a čísla.

Obě tyto operace přitom provádíme tzv. *po složkách.*

1.3.1 Součet dvou vektorů

Uvažujeme-li dva vektory stejné délky

$$v = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \vdots \\ \nu_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \qquad w = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

pak jejich součtem rozumíme vektor

$$v + w = \begin{bmatrix} \nu_1 + \omega_1 \\ \nu_2 + \omega_2 \\ \nu_3 + \omega_3 \\ \vdots \\ \nu_n + \omega_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

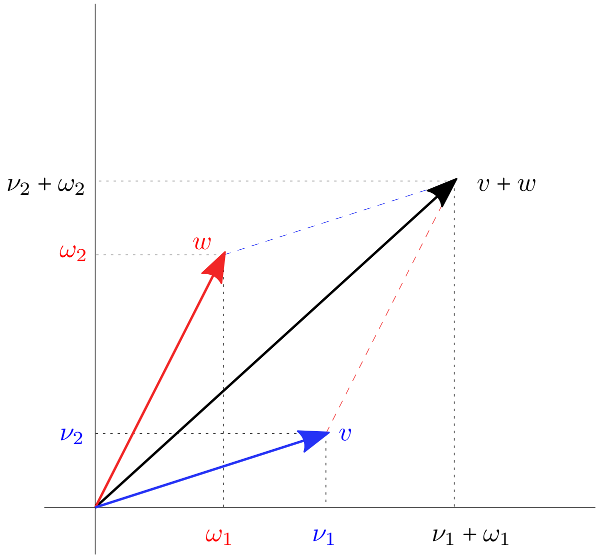
Součet lze také zapsat

$$(v + w)_j = \nu_j + \omega_j, \qquad \text{pro} \quad j = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

kde symbolem $(\,\cdot\,)_j$ značíme zobrazení

$$(\,\cdot\,)_j \;:\; \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

které vektoru přiřadí jeho j-tou složku, speciálně tedy $(v)_j = \nu_j$. Sčítání vektorů má i svou geometrickou interpretaci, kterou lze nahlédnout na obrázku 1.1.



Obrázek 1.1: Geometricky lze provést součet dvou vektorů (zde délky dva) pomocí tzv. doplnění na rovnoběžník.

Vektory různých délek sčítat nebudeme. Někdy se s tím můžeme v nějaké podobě setkat (např. vektory v rovině sčítáme s vektory v prostoru), v takovém případě vždy ale víme, jak je rovina v prostoru orientovaná, a zpravidla umíme rovinné vektory v prostoru snadno interpretovat — např. tak, že je na vhodném místě doplníme nulou, takže se de facto jedná o vektory třísložkové.

1.3.2 Součin vektoru a čísla

Uvažujeme-li náš reálný vektor v a nějaké reálné číslo α, tj.

$$v = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \vdots \\ \nu_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

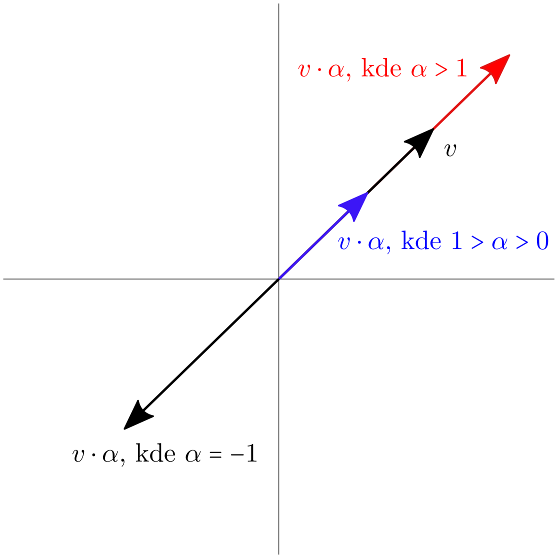
pak jejich součinem rozumíme vektor

$$v \cdot \alpha = \begin{bmatrix} \nu_1 \cdot \alpha \\ \nu_2 \cdot \alpha \\ \nu_3 \cdot \alpha \\ \vdots \\ \nu_n \cdot \alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Součin lze také zapsat

$$(v \cdot \alpha)_j = \nu_j \cdot \alpha, \qquad \text{pro} \quad j = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

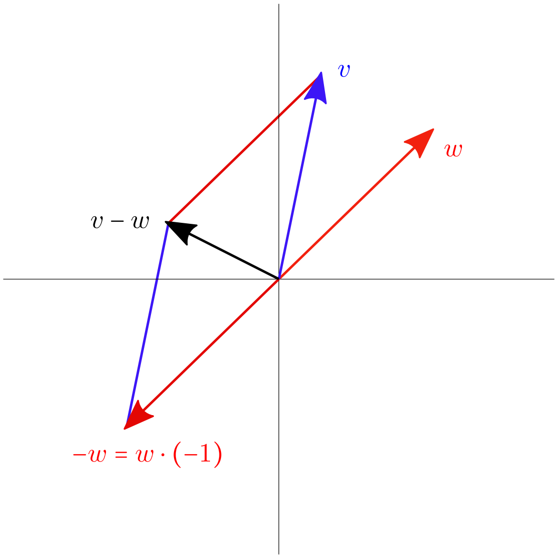
Geometrická interpretace součinu závisí na velikosti (přesněji absolutní hodnotě) a znaménku čísla α, viz obrázek 1.2.



Obrázek 1.2: Součin vektoru s číslem se geometricky projeví prodloužením, zkrácením, případně změnou orientace vektoru.

Zamyslíme-li se nad geometrickou interpretací vektoru, vidíme, že kromě zkrácení či prodloužení délky vektoru může dojít také ke třem speciálním situacím:

- Pro $\alpha = 1$ dostaneme $v \cdot 1 = v$. Vektor se při násobení jedničkou nezmění.
- Pro $\alpha = 0$ dostaneme
$$v \cdot 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$
tzv. *nulový vektor* délky n. Ten budeme pro jednoduchost značit symbolem 0 (tedy $v \cdot 0 = 0$). V případě, že by mohlo dojít ke zmatení a záměně nuly (tj. čísla) s nulovým vektorem, rozměry nulového vektoru upřesníme indexem, tj. 0_n (tedy $v \cdot 0 = 0_n$).
- Pro $\alpha = -1$ dostaneme, jak je v obrázku 1.2 naznačeno, tzv. *opačný vektor*, který budeme pro jednoduchost značit $-v$ (tedy $v \cdot (-1) = -v$). Opačný vektor nám umožní zavést odečítání vektorů, tedy
$$v - w = v + (-w) = v + (w \cdot (-1)), \qquad \text{neboli} \qquad (v - w)_j = \nu_j - \omega_j.$$
Speciálně tedy platí $v - v = 0_n$. Geometrickou interpretaci rozdílu vidíme na obrázku 1.3.



Obrázek 1.3: Součin vektoru s číslem se geometricky projeví prodloužením, zkrácením, případně změnou orientace vektoru.

Úloha 1.3. *Protože budeme časem pracovat i s komplexními čísly, tedy složky našeho vektoru v budou komplexní čísla a číslo α bude také komplexní, čtenář si zopakuje, jak se sčítají a násobí komplexní čísla.*

Sčítání je nepatrně jednodušší, protože vlastně probíhá také po složkách. Přesněji řečeno sčítáme reálné a imaginární složky zvlášť, tedy pro

$$c = a + b \cdot \mathbf{i} \qquad a \qquad z = x + y \cdot \mathbf{i}$$

platí

$$c + z = (a + b \cdot \mathbf{i}) + (x + y \cdot \mathbf{i}) = (a + x) + (b + y) \cdot \mathbf{i}.$$

Součin není o tolik těžší. Stačí si uvědomit, že komplexní čísla jsou vlastně dvoučleny a jak se násobí dvoučleny, tedy

$$\begin{aligned} c \cdot z &= (a + b \cdot \mathbf{i}) \cdot (x + y \cdot \mathbf{i}) \\ &= a \cdot x + a \cdot y \cdot \mathbf{i} + b \cdot \mathbf{i} \cdot x + b \cdot \mathbf{i} \cdot y \cdot \mathbf{i}(a + x) \\ &= (a \cdot x - b \cdot y) + (a \cdot y + b \cdot x) \cdot \mathbf{i}. \end{aligned}$$

Pro lepší vhled do násobení komplexních čísel je ovšem užitečné uvažovat je v tzv. goniometrickém tvaru, tedy

$$c = |c| \cdot (\cos(\phi) + \sin(\phi) \cdot \mathbf{i}) \qquad a \qquad z = |z| \cdot (\cos(\psi) + \sin(\psi) \cdot \mathbf{i}),$$

kde $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$ je absolutní hodnota komplexního čísla c a ϕ tzv. argument, tedy úhel, který svírá spojnice počátku komplexní roviny a čísla c s kladnou částí *reálné poloosy. Pak*

$$c \cdot z = (|c| \cdot |z|) \cdot (\cos(\phi + \psi) + \sin(\phi + \psi) \cdot \mathbf{i}).$$

Tedy absolutní hodnoty čísel se násobí a argumenty se sčítají.

1.3.3 Lineární kombinace vektorů

Při zavedení rozdílu vektorů vidíme, že vlastně používáme obě předchozí operace dohromady. Jeden vektor násobíme číslem (konkrétně číslem −1) a následně vektory sčítáme. V principu nám ale nic nebrání vektor před sčítáním násobit jiným číslem, resp. různými čísly násobit oba vektory. Tím se dostáváme k důležité univerzálnější operaci, kterou budeme uvažovat. Mějme naše dva vektory stejné délky

$$v = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \vdots \\ \nu_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \qquad w = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

a k nim dvě čísla

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Pak vektor

$$v \cdot \alpha + w \cdot \beta = \begin{bmatrix} \nu_1 \cdot \alpha + \omega_1 \cdot \beta \\ \nu_2 \cdot \alpha + \omega_2 \cdot \beta \\ \nu_3 \cdot \alpha + \omega_3 \cdot \beta \\ \vdots \\ \nu_n \cdot \alpha + \omega_n \cdot \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

tj.

$$(v \cdot \alpha - w \cdot \beta)_j = \nu_j \cdot \alpha + \omega_j \cdot \beta,$$

nazýváme *lineární kombinací* (dvou) vektorů v a w. Čísla α a β nazýváme *koeficienty lineární kombinace.* Univerzalita lineární kombinace je zřejmá:

- pro $\alpha = 1$, $\beta = 1$ je prostým součtem obou vektorů, tj. $v + w$,
- pro α obecné a $\beta = 0$ je součinem vektoru s číslem, tj. $v \cdot \alpha$,
- pro $\alpha = 1$, $\beta = -1$ je rozdílem obou vektorů, tj. $v - w$,
- atp.

Lineární kombinace je však pojem ještě nepatrně obecnější. Nic nám totiž nebrání uvažovat obecnější počet vektorů než jen dva, které budeme kombinovat. Následující definice takovou obecnou lineární kombinaci spolu s dalšími užitečnými pojmy zavádí.

Definice 1.2 (Lineární kombinace vektorů)**.** *Uvažujme $k \in \mathbb{N}_+$ reálných, resp. komplexních vektorů délky $n \in \mathbb{N}_+$*

$$v_\ell = \begin{bmatrix} \nu_{1,\ell} \\ \nu_{2,\ell} \\ \nu_{3,\ell} \\ \vdots \\ \nu_{n,\ell} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \ \textit{resp.}\ \mathbb{C}^n, \qquad \textit{kde} \quad \ell = 1, 2, 3, \dots, k$$

a reálná, resp. komplexní čísla

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \dots,\ \alpha_k \in \mathbb{R},\ \textit{resp.}\ \mathbb{C}.$$

Vektor

$$z = \sum_{\ell=1}^{k} v_\ell \cdot \alpha_\ell = v_1 \cdot \alpha_1 + v_2 \cdot \alpha_2 + v_3 \cdot \alpha_3 + \cdots + v_k \cdot \alpha_k$$

nazýváme lineární kombinací vektorů v_ℓ s koeficienty α_ℓ.

Pokud

$$\forall \ell \in \{1, 2, 3, \dots, k\} \qquad \textit{platí} \qquad \alpha_\ell = 0,$$

tj. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_k = 0$, pak lineární kombinaci nazýváme triviální.

Lineární kombinaci, která není triviální, tedy takovou, že

$$\exists \ell' \in \{1, 2, 3, \dots, k\}, \qquad \textit{pro které} \qquad \alpha_{\ell'} \neq 0,$$

nazýváme netriviální.

Povšimněme si, že počet vektorů je kladné přirozené číslo, tedy speciálně může být i jeden (pro $k = 1$). Dále si povšimněme, že pro *triviální* lineární kombinaci vždy platí

$$z = \sum_{\ell=1}^{k} v_\ell \cdot \alpha_\ell = \sum_{\ell=1}^{k} v_\ell \cdot 0 = v_1 \cdot 0 + v_2 \cdot 0 + v_3 \cdot 0 + \cdots + v_k \cdot 0 = 0_n.$$

Na závěr ještě poznamenejme, že ze střední školy pravděpodobně známe pojem *nekonečné* (*geometrické*) *řady*, resp. jejího *součtu*. Časem se seznámíme i s košatějšími nekonečnými řadami, např. řadami funkcí, které se budou lineárním kombinacím nápadně podobat. Lineární kombinací se však zpravidla rozumí kombinace *konečně* mnoha vektorů.

1.3.4 Součin dvou vektorů?

Umíme-li dva vektory sečíst, může vzniknout oprávněný dotaz, zda umíme dva vektory také vynásobit. Mnozí čtenáři se jistě s některými součiny vektorů setkali. Součiny záměrně zmiňujeme v množném čísle, protože součin dvou vektorů lze definovat mnoha různými způsoby. Čtenář se pravděpodobně setkal zejména s pojmy *skalární součin* a *vektorový součin* (případně také *smíšený součin*, který však již operuje na třech vektorech a je kombinací právě součinu skalárního a vektorového). Nicméně součin dvou vektorů lze definovat i jinými způsoby, mezi další nejběžnější patří např. tzv. *Hadamardův součin*, který je definován po složkách, stejně jako součet, nebo tzv. *vnější součin*, viz také sekci 2.2.2.

1.3.4.1 Skalární součin

Skalárnímu součinu, jeho definici, významu a vlastnostem se budeme detailněji věnovat v kapitole 7, sekci 7.2. Nicméně i tak bude užitečné si vzpomenout jak tento součin nejčastěji (později uvidíme, že skalární součin lze definovat nekonečně mnoha různými způsoby) vypadá. Uvažujme naše dva *reálné* vektory

$$v = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \vdots \\ \nu_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \qquad w = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Standardním skalárním součinem dvou vektorů je číslo (v analytické geometrii se často značí prostým $v \cdot w$, my budeme používat jiný symbol)

$$\langle\, v \,|\, w \,\rangle = \sum_{j=1}^{n} \nu_j \cdot \omega_j = \nu_1 \cdot \omega_1 \,+\, \nu_2 \cdot \omega_2 \,+\, \nu_3 \cdot \omega_3 \,+\, \cdots \,+\, \nu_n \cdot \omega_n.$$

Tedy *součet součinů odpovídajících si složek.* Na operaci součtu součinů odpovídajících si složek (různých objektů) budeme narážet opakovaně, proto není od věci to připomenout.

Dobré je také připomenout, že skalární součin jakýmsi způsobem souvisí s tím, zda příslušné vektory (ne)svírají pravý úhel. Přesněji řečeno, z analytické geometrie víme, že pokud jsou vektory v a w kolmé, pak je jejich skalární součin roven nule. Později uvidíme, že věci jsou možná trochu naopak, a sice, že kolmost nebo lépe řečeno pravoúhlost neboli *ortogonalita* (resp. úhly obecně) jsou nulovostí skalárního součinu (resp. jeho hodnotami) *definovány.* Což je důležité zejména v souvislosti s již naznačeným faktem, že skalární součin mohu definovat různými způsoby (a tím i tedy i pravoúhlost a úhly obecně).

Pozor! Jak uvidíme později, výše zmíněným způsobem lze skalární součin definovat pouze v případě reálných vektorů. Ve světě komplexních vektorů budeme muset být poněkud obezřetnější.

1.3.4.2 Vektorový součin

Vektorovým součinem se nebudeme příliš zabývat, nicméně se o něm trochu zmíníme v kapitole 9, sekci 9.4.3.

Pozor! Ústřední nevýhodou, která bude vektorový součin v našem textu fatálně diskvalifikovat, je, že lze snadno definovat pouze pro třísložkové vektory. Přesněji řečeno, pro ně se zpravidla definuje způsobem, který neumožňuje snadné a přímočaré zobecnění (ani pro vektory kratší, ani pro vektory delší). Některá možná zobecnění nicméně později naznačíme.

Pro vektory

$$v = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \qquad w = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

je definován v tento okamžik trochu tajemným a ne příliš přehledným způsobem

$$v \times w = \begin{bmatrix} \nu_2 \cdot \omega_3 - \nu_3 \cdot \omega_2 \\ \nu_3 \cdot \omega_1 - \nu_1 \cdot \omega_3 \\ \nu_1 \cdot \omega_2 - \nu_2 \cdot \omega_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Důležité pozorování je, že vektorovým součinem dvou vektorů je, na rozdíl od skalárního součinu, vektor.

Vektorový i skalární součin mají řadu zajímavých vlastností, které zde nebudeme zmiňovat. Nicméně když už byla řeč o kolmosti, jistě stojí za zmínku, že vektorový součin $v \times w$ je kolmý (v klasickém slova smyslu) na každý z obou svých součinitelů v a w.

1.4 Matice

Vektory jsme sice nyní vytvářeli jen z reálných nebo komplexních čísel, snadno si ale můžeme představit, že složky vektoru budou i jiná čísla nebo jiné objekty. Speciálně si můžeme představit vektor (např. k-složkový), jehož složky jsou opět vektory, tentokrát však již reálné nebo komplexní (např. n-složkové). Takový vektor vektorů bude ve výsledku obsahovat $n \cdot k$ čísel. Abychom jej mohli zapsat nějak přehledněji, uchýlíme se k tomu, že např. vnější vektor budeme psát jako *řádek* a vnitřní vektory jako *sloupce* (nebo naopak, chceme-li). Dostaneme tak objekt, uspořádanou $(n \cdot k)$-tici, kterou můžeme srovnat do tvaru „tabulky“. Právě takovou tabulku budeme nazývat maticí. Pro zdůraznění jejího tvaru ji budeme nazývat (n, k)-ticí, přičemž první číslo bude vždy značit počet řádků a druhé počet sloupců tabulky.

1.4.1 Matice jako uspořádané (n, k)-tice

Časem uvidíme, že o maticích můžeme uvažovat v mnoha různých významech a kontextech, v tento okamžik však vystačíme s následující definicí.

Definice 1.3 (Matice)**.** *Maticí velikosti $n \times k$, $n, k \in \mathbb{N}_+$ nazveme uspořádanou (n, k)-tici reálných, resp. komplexních čísel,*

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,k} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times k}, \ \textit{resp. } \mathbb{C}^{n \times k}.$$

Číslo $a_{j,\ell} \in \mathbb{R}$*, resp.* $\mathbb{C}$*,* $j = 1,2,3,\dots,n$*,* $\ell = 1,2,3,\dots,k$ *nazýváme* (j,ℓ)*-tým prvkem, případně* (j,ℓ)*-tou složkou matice.*

Poznamenejme ještě, že vektor

$$a_\ell = \begin{bmatrix} a_{1,\ell} \\ a_{2,\ell} \\ a_{3,\ell} \\ \vdots \\ a_{n,\ell} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \textit{ resp. } \mathbb{C}^n, \qquad \textit{kde} \quad \ell = 1,2,3,\dots k,$$

nazýváme ℓ*-tým sloupcem matice* A *a vektor*

$$\underline{a}_j = \begin{bmatrix} a_{j,1} \\ a_{j,2} \\ a_{j,3} \\ \vdots \\ a_{j,k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^k, \textit{ resp. } \mathbb{C}^k, \qquad \textit{kde} \quad j = 1,2,3,\dots n,$$

nazýváme j*-tým řádkem matice* A*.*

Kromě sloupců a řádků matice se také často setkáme s vektorem

$$a_{\mathrm{diag}} = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,2} \\ a_{3,3} \\ \vdots \\ a_{\mu,\mu} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^\mu, \text{ resp } \mathbb{C}^\mu, \qquad \text{kde} \quad \mu = \min\{n,k\},$$

který nazýváme *diagonálou* matice A.

1.4.2 Součet dvou matic, součin matice a čísla

Protože matici jsme motivovali jako vektor vektorů a definovali ji stejně jako vektor, nepřekvapí nás, že budeme chtít umět provozovat s maticemi podobnou aritmetiku jako s vektory. Speciálně budeme chtít umět provést:

- součet dvou matic a
- součin matice a čísla.

Obě tyto operace přitom budeme provádět opět *po složkách*. Uvažujme tedy dvě matice stejných rozměrů

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,k} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \cdots & a_{3,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,k} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,k} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,k} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & \cdots & b_{3,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times k},$$

pak jejich součtem rozumíme matici

$$A + B \qquad \text{takovou, že} \qquad (A + B)_{j,\ell} = a_{j,\ell} + b_{j,\ell},$$

kde symbolem $(\cdot)_{j,\ell}$ značíme, obdobně jako v případě vektorů, zobrazení

$$(\cdot)_{j,\ell} : \mathbb{R}^{n\times k} \longrightarrow \mathbb{R},$$

které matici přiřadí její (j,ℓ)-tou složku (tedy j-tý prvek ℓ-tého sloupce, nebo též ℓ-tý prvek j-tého řádku), speciálně tedy $(A)_{j,\ell} = a_{j,\ell}$. Obdobně, máme-li navíc reálné číslo $\alpha \in \mathbb{R}$, pak součinem matice a čísla rozumíme matici

$$A \cdot \alpha \qquad \text{takovou, že} \qquad (A \cdot \alpha)_{j,\ell} = a_{j,\ell} \cdot \alpha.$$

Analogicky bychom mohli definovat i lineární kombinaci dvou (resp. více) matic stejných rozměrů.

1.4.3 Transpozice matice

Transpozicí matice rozumíme jednoduché zobrazení, které zamění sloupce a řádky dané matice (při zachování jejich pořadí). Vulgárně můžeme transpozici popsat jako jakési „překlopení podle diagonály“. Transponovanou matici budeme značit horním indexem T, tedy A^T. Formálně

$$^\mathsf{T} : \mathbb{R}^{n\times k} \longrightarrow \mathbb{R}^{k\times n},$$

přičemž

$$(A^\mathsf{T})_{\ell,j} = a_{j,\ell}.$$

Nejsnáze lze pojem transpozice ilustrovat na konkrétním příkladu.

Příklad 1.1. *Uvažujme např. matici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \textit{pak} \qquad A^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Diagonála matice i její transpozice je vyznačena červeně.

Zřejmě pro každou matici platí

$$(A^\mathsf{T})^\mathsf{T} = A,$$

jak si laskavý čtenář sám rozmyslí.

1.4.4 Matice speciálních tvarů

Viděli jsme, že pojem matice můžeme zavést pomocí pojmu vektor, jako vektor vektorů. V jistém smyslu je tedy matice vektorem (více o tom budeme hovořit v sekci 6.1.2.2).

Na druhou stranu vidíme, že základní operace (sčítání a násobení číslem) provozujeme s maticemi a vektory stejným způsobem — totiž po složkách. Speciálně tak můžeme každý vektor považovat za zvláštní matici mající jen jediný sloupec. Tedy

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

můžeme považovat za vektor. (Ostatně kartézské mocniny $\mathbb{R}^{n,1}$ a $\mathbb{R}^n$ se liší pouze formálně.)

Obdobně ale můžeme uvažovat matici mající jen jediný řádek, tedy

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times k},$$

a takové matice považovat za (pro mnoho z nás možná obvyklejší) *řádkové vektory*. (Opět je zřejmé, že kartézské mocniny $\mathbb{R}^{1,k}$ a $\mathbb{R}^k$ se liší jen formálně.)

Posledním speciálním tvarem matice, se kterým se setkáme, bude tzv. *čtvercová matice*, což, jak název sám napovídá, nastane v okamžiku, je-li počet řádků roven počtu sloupců (tj. $n = k$),

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Číslo n pak obvykle nazýváme *řádem* čtvercové matice. Podobně jako můžeme diskutovat o tom, zda čtverec je, či není obdélníkem (resp. jeho speciálním případem), i zde se můžeme setkat s různým názorem na to, zda je matice obdélníkovou pouze pokud $n \neq k$, nebo kdykoliv.

1.4.5 Matice se speciální strukturou prvků

Zejména v případě čtvercových matic (ale nejen) se můžeme setkat s dalšími pojmy popisujícími tvar matice, lépe řečeno strukturu jejich (ne)nulových prvků. S řadou takových pojmů se budeme seznamovat postupně, nyní zmíníme jen ty nejdůležitější.

Speciálně čtvercovou matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ splňující

$$a_{j,\ell} = 0 \qquad \text{pro všechna} \qquad j > \ell,$$

tedy mající všechny *poddiagonální prvky* nulové, nazveme *maticí horní trojúhelníkovou.* Obdobně čtvercovou matici splňující

$$a_{j,\ell} = 0 \qquad \text{pro všechna} \qquad j < \ell,$$

tedy mající všechny *naddiagonální prvky* nulové, nazveme *maticí dolní trojúhelníkovou.* Čtvercovou matici, která je horní trojúhelníková a zároveň dolní trojúhelníková, tedy má nulové všechny *mimodiagonální prvky*, nazveme *maticí diagonální.* Schematicky vypadají tyto matice (např. řádu 5) jako:

$$\begin{bmatrix} \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit \\ 0 & \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit \\ 0 & 0 & \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit \\ 0 & 0 & 0 & \heartsuit & \heartsuit \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \heartsuit \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \heartsuit & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \heartsuit & \heartsuit & 0 & 0 & 0 \\ \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit & 0 & 0 \\ \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit & 0 \\ \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit & \heartsuit \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \heartsuit & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \heartsuit & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \heartsuit & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \heartsuit & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \heartsuit \end{bmatrix},$$

kde $\heartsuit$ reprezentuje obecný prvek matice, o kterém nic bližšího nevíme.

Poznamenejme, že diagonální matici

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \qquad \text{s diagonálou} \qquad a_{\text{diag}} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

budeme často pro jednoduchost zapisovat jako

$$A = \operatorname{diag}(d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Mezi diagonálními maticemi pak bude nesmírně důležitou tzv. *matice jednotková*, kterou budeme značit I, případně I_n pro zdůraznění jejího řádu, pro kterou platí

$$I = I_n = \operatorname{diag}(1, 1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n.$$

Blízkou příbuznou jednotkové matice je tzv. *matice skalární*, kterou budeme značit $I\alpha$, případně $I_n\alpha$ pro zdůraznění jejího řádu a která je α-násobkem jednotkové matice, tedy

$$I\alpha = I_n\alpha = I_n \cdot \alpha = \operatorname{diag}(\alpha, \alpha, \alpha, \ldots, \alpha) \in \mathbb{R}^n$$

pro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Speciální zmínku pak zaslouží *matice nulová*, mající všechny prvky rovny nule. Podobně jako v případě nulového vektoru budeme takovou matici značit prostým symbolem 0. V případě, že bude nutné zdůraznit rozměry nulové matice, připíšeme je ve formě dolního indexu $0_{n,k}$. Tedy

$$0 = 0_{n,k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times k}.$$

Na závěr mezi často používané matice se speciální strukturou prvků zahrneme tzv. *matice symetrické*. Jedná se o čtvercové matice, které se nezmění, pokud zaměníme jejich řádky za jejich sloupce, tj. jsou *invariantní vůči transpozici*. Pro symetrickou matici tedy platí

$$A = A^{\mathsf{T}} \qquad \text{neboli} \qquad a_{j,\ell} = a_{\ell,j} \quad \text{pro všechna} \quad j \text{ a } \ell.$$

Příkladem takové matice s konkrétními čísly je třeba matice

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Symetrie se tedy manifestuje tím, že matici mohu „překlopit podle diagonály“ a ona se tím nezmění.

Kapitola 2

Maticové násobení

Kdyby matice byly jen jinak zapsané vektory, případně kdyby vektory byly jen matice speciálního tvaru, bylo by asi zbytečné matice takto zavádět. Nyní se tedy podíváme do pokročilejší aritmetiky matic a vektorů. Podíváme se, jak mohou tyto objekty iteragovat pomocí operace, kterou budeme nazývat násobení, případně součin, konkrétně se podíváme:

- na součin matice a vektoru (zkráceně MV-součin) a
- na součin dvou matic (zkráceně MM-součin).

Speciálně nás bude zajímat, jak lze tyto součiny interpretovat a k čemu všemu mohou být užitečné.

2.1 Součin matice a vektoru (MV-součin)

Začneme tím nejjednodušším, tedy součinem matice a vektoru. Ne každou dvojici matice a vektoru půjde vynásobit. Součin bude definovaný pouze pro matici a vektor splňující jakousi *podmínku kompatibility*, kterou můžeme slovně vyjádřit jako:

Počet sloupců matice musí být roven délce vektoru.

2.1.1 MV-součin — definice a příklady užití

Součin tedy budeme definovat pro dvojici

$$A \in \mathbb{R}^{n\times k} \quad \text{a} \quad v \in \mathbb{R}^{k}.$$

Definovaný bude, s využitím společného rozměru k, jako součet součinů odpovídajících si prvků (viz také sekci 1.3.4.1).

Definice 2.1 (Součin matice a vektoru (MV-součin))**.** *Součinem matice A velikosti $n \times k$,*

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,k} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times k}, \ \textit{resp.}\ \mathbb{C}^{n\times k},$$

a vektoru v délky k,

$$v = \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \vdots \\ \nu_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^k, \ \textit{resp.}\ \mathbb{C}^k,$$

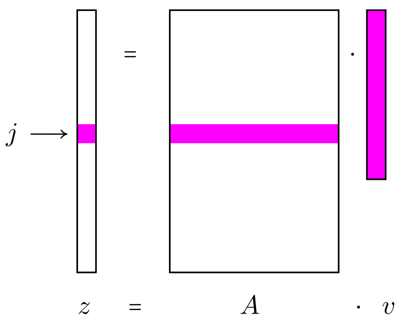
rozumíme vektor z délky n,

$$z = A \cdot v \in \mathbb{R}^n, \ \textit{resp.}\ \mathbb{C}^n,$$

jehož j-tá složka $\zeta_j = (z)_j$ je dána vztahem

$$\zeta_j = \sum_{\ell=1}^{k} a_{j,\ell} \cdot \nu_\ell = a_{j,1} \cdot \nu_1 + a_{j,2} \cdot \nu_2 + a_{j,3} \cdot \nu_3 + \cdots + a_{j,k} \cdot \nu_k.$$

Na j-tou složku součinu $z = A \cdot v$ se tedy můžeme (alespoň v reálných číslech) dívat jako na skalární součin j-tého řádku matice A s vektorem v (aby nedošlo k mýlce, poznamenejme, že MV-součin je pro reálné a komplexní matice definován zcela stejně; to, co se v komplexním světě liší, je definice skalárního součinu). Schematicky součin matice a vektoru vidíme na obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Součin z matice A a vektoru v, resp. jeho j-tá složka ζ_j je součtem součinů odpovídajících si složek j-tého řádku matice a vektoru v.

Příklad 2.1. *Jednoduchý příklad, na kterém můžeme ilustrovat užití MV-součinu a tedy snad i užitečnost, bude následující soustava tří lineárních algebraických rovnic pro tři neznámé — připomeňme, že každou z nich můžeme interpretovat jako rovinu v prostoru*

$$\begin{array}{lrrrrl} \mathscr{R}_1 : & x & +3\cdot y & +z & = & 0, \\ \mathscr{R}_2 : & & 2\cdot y & -z & = & 1, \\ \mathscr{R}_3 : & -x & -8\cdot y & +3\cdot z & = & 4. \end{array}$$

Počet rovnic, počet neznámých i konkrétní koeficienty na levých i pravých stranách jsou přitom zvoleny víceméně náhodně.

Začneme tím, že si dáme zvlášť koeficienty na levých stranách rovnic, neznámé a koeficienty na pravých stranách rovnic. Z koeficientů na levých stranách přitom vytvoříme matici — tzv. matici soustavy — tím způsobem, že řádky budou odpovídat jednotlivým rovnicím a sloupce jednotlivým neznámým, obojí v nějakém konkrétním, pevně zvoleném pořadí, např.

$$\begin{array}{lc} \begin{array}{l} \mathscr{R}_1 \longrightarrow \\ \mathscr{R}_2 \longrightarrow \\ \mathscr{R}_3 \longrightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -8 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}. \\ & \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{array} \end{array}$$

Ve stejných pořadích vytvoříme z neznámých a z koeficientů na pravých stranách vektory — tzv. vektor neznámých a vektor pravých stran.

Klíčová pro nás bude levá strana soustavy, kterou jsme rozdělili do dvou objektů, do matice soustavy a do vektoru neznámých. Snadno ověříme, že jejich součinem dostaneme vektor — tzv. vektorem levých stran

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -8 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & +3\cdot y & +z \\ & 2\cdot y & -z \\ -x & -8\cdot y & +3\cdot z \end{bmatrix}.$$

Požadavek na rovnost levé a pravé strany u každé jednotlivé rovnice se tak přetaví v požadavek na rovnost vektorů levých a pravých stran. Ve výsledku tak dostáváme celou soustavu rovnic zapsanou maticově

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -8 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Z předchozího příkladu můžeme učinit následující obecný závěr, resp. obecné pozorování.

Pozorování 2.1. *Obecně tak můžeme jakoukoliv soustavu n lineárních algebraických rovnic pro k neznámých ξ_ℓ, $\ell = 1,2,3,\ldots,k$, s koeficienty $a_{j,\ell}$ na levých a β_j na pravých stranách, tj.*

$$\mathscr{R}_j \; : \; \sum_{\ell=1}^{k} a_{j,\ell}\cdot\xi_\ell = \beta_j, \qquad \textit{kde} \qquad j = 1,2,3,\ldots,n,$$

zapsat ve tvaru

$$\underbrace{\textit{matice soustavy}}_{\in \mathbb{R}^{n\times k}} \cdot \underbrace{\textit{vektor neznámých}}_{\in \mathbb{R}^{k}} = \underbrace{\textit{vektor pravých stran}}_{\in \mathbb{R}^{n}}.$$

Matici soustavy zpravidla značíme písmenem A, vektor neznámých zpravidla písmenem x a vektor pravých stran zpravidla písmenem b. Celou soustavu pak můžeme zapsat velmi kompaktním způsobem

$$A \cdot x = b,$$

rozepsáno po složkách

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,k} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

Vidíme tak, že se soustava lineárních algebraických rovnic v maticovém zápisu tváří jako jediná lineární rovnice s jedinou neznámou x, která je však vektorová.

Celý příklad rozebíráme obecně proto, že bychom rádi ukázali ještě druhý způsob zápisu soustavy rovnic pomocí maticového násobení. Obecnou rovnici přímky i obecnou rovnici roviny jsme zvyklí psát ve tvaru „výraz na levé straně $= 0$“. Stejným způsobem si můžeme přerovnat i všechny rovnice $\mathcal{R}_j$ — časem uvidíme, že každá z nich je vlastně rovnicí nějaké $(k-1)$-rozměrné nadroviny v k-rozměrném prostoru — dostaneme tak

$$\mathcal{R}_j \ : \ \sum_{\ell=1}^{k} a_{j,\ell} \cdot \xi_\ell - \beta_j = 0, \qquad \textit{kde} \qquad j = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Stejně jako prve můžeme oddělit všechny známé koeficienty $a_{j,\ell}$ a β_j do matice a všechny neznámé do vektoru. Tentokrát se nám na levou stranu připletly i koeficienty β_j, které sice nejsou násobené žádnou neznámou, zato jsou však násobené známým číslem -1. Dostaneme matici — tzv. rozšířenou matici soustavy —, která obsahuje původní matici soustavy, a navíc také vektor pravých stran, a, řekněme, rozšířený vektor neznámých

$$\left[\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,k} & \beta_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,k} & \beta_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,k} & \beta_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,k} & \beta_n \end{array}\right], \qquad \left[\begin{array}{c} x \\ \hline -1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_k \\ \hline -1 \end{array}\right].$$

Svislá a vodorovná čára jsou pouze grafické prvky sloužící k lepšímu optickému oddělení jednotlivých součástí.

Snadno ověříme, že

$$\left[\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} x \\ \hline -1 \end{array}\right] = 0_n.$$

Soustavu jsme tak dostali ve tvaru

$$\underbrace{\textit{rozšířená matice soustavy}}_{\in \mathbb{R}^{n\times(k+1)}} \cdot \underbrace{\textit{rozšířený vektor neznámých}}_{\in \mathbb{R}^{k+1}} = \underbrace{\textit{nulový vektor}}_{\in \mathbb{R}^{n}}.$$

Příklad 2.2. *Druhým příkladem užití součinu matice a vektoru bude geometrická transformace, konkrétně rotace roviny. Uvažujme matici*

$$G(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix},$$

kterou budeme nazývat Givensovou rotací. Snadno ověříme, že pro tzv. eukleidovské vektory

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

platí

$$G(\varphi) \cdot e_1 = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix}, \qquad G(\varphi) \cdot e_2 = \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{bmatrix}.$$

Obecný vektor roviny lze zřejmě napsat jako lineární kombinaci obou eukleidovských vektorů,

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot y = e_1 \cdot x + e_2 \cdot y.$$

Snadno také ověříme, že koeficienty x a y této lineární kombinace jsou dány jednoznačně. Pro součin matice $G(\varphi)$ s obecným vektorem v pak platí

$$\begin{aligned} G(\varphi) \cdot v &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \cdot x - \sin(\varphi) \cdot y \\ \sin(\varphi) \cdot x + \cos(\varphi) \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \cdot x \\ \sin(\varphi) \cdot x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) \cdot y \\ \cos(\varphi) \cdot y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{bmatrix} \cdot y = (G(\varphi) \cdot e_1) \cdot x + (G(\varphi) \cdot e_2) \cdot y. \end{aligned}$$

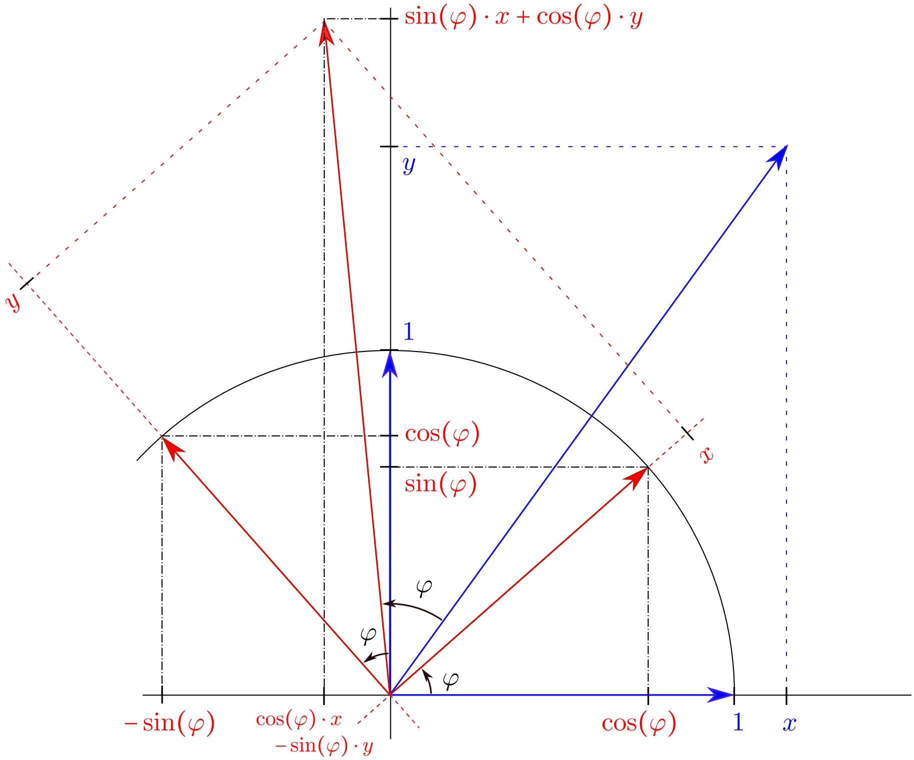
Jinými slovy, součin $G(\varphi) \cdot v$ lze interpretovat jako lineární kombinaci součinů $G(\varphi) \cdot e_j$, $j = 1, 2$, s týmiž koeficienty x a y.

Platí zde tedy jakási forma distributivního zákona (jak uvidíme později, viz sekci 2.3.3), násobení matic a vektorů je vůči sčítání matic a vektorů distributivní zcela obecně,

$$G(\varphi) \cdot (e_1 \cdot x + e_2 \cdot y) = (G(\varphi) \cdot e_1) \cdot x + (G(\varphi) \cdot e_2) \cdot y.$$

Zbývá se jen zamyslet, co matice $G(\varphi)$ s vektory e_1, e_2 a jejich obecnou lineární kombinací v provedla. Pro toto zamyšlení odkazujeme na obrázek 2.2.

Vidíme tedy, že součinu matice a vektoru můžeme přiřadit také význam geometrické transfomrace.



Obrázek 2.2: Rotace roviny jako násobení matice vektorem. Modře jsou vyznačeny vektory e_1, e_2 a $v = e_1 \cdot x + e_2 \cdot y$. Červeně pak jejich součiny s maticí rotace $G(\varphi)$. Vidíme, že násobení maticí Givensovy rotace $G(\varphi)$ vektory roviny otáčí o úhel φ proti směru hodinových ručiček.

2.1.2 MV-součin jako lineární kombinace sloupců matice

Na součin matice a vektoru se můžeme dívat ještě zcela jinýma očima. Zkusme si součin, tj. vektor $z = A \cdot v$ rozepsat pořádně. Víme totiž, jak vypadá jeho j-tá složka,

$$\zeta_j = \sum_{\ell=1}^{k} a_{j,\ell} \cdot \nu_\ell = a_{j,1} \cdot \nu_1 + a_{j,2} \cdot \nu_2 + a_{j,3} \cdot \nu_3 + \cdots + a_{j,k} \cdot \nu_k.$$

Dostaneme tak

$$z = \begin{bmatrix} \sum_{\ell=1}^{k} a_{1,\ell} \cdot \nu_\ell \\ \sum_{\ell=1}^{k} a_{2,\ell} \cdot \nu_\ell \\ \sum_{\ell=1}^{k} a_{3,\ell} \cdot \nu_\ell \\ \vdots \\ \sum_{\ell=1}^{k} a_{n,\ell} \cdot \nu_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} \cdot \nu_1 + a_{1,2} \cdot \nu_2 + a_{1,3} \cdot \nu_3 + \cdots + a_{1,k} \cdot \nu_k \\ a_{2,1} \cdot \nu_1 + a_{2,2} \cdot \nu_2 + a_{2,3} \cdot \nu_3 + \cdots + a_{2,k} \cdot \nu_k \\ a_{3,1} \cdot \nu_1 + a_{3,2} \cdot \nu_2 + a_{3,3} \cdot \nu_3 + \cdots + a_{3,k} \cdot \nu_k \\ \vdots \\ a_{n,1} \cdot \nu_1 + a_{n,2} \cdot \nu_2 + a_{n,3} \cdot \nu_3 + \cdots + a_{n,k} \cdot \nu_k \end{bmatrix}.$$

Každá složka vektoru je tedy tvořena součtem k sčítanců. Protože víme, jak vektory sčítat (připomeňme, že po složkách), umíme také naopak vektor, jehož složky jsou součty čísel, napsat jako součet vektorů. V tomto případě tedy můžeme vektor z zapsat jako součet k vektorů

$$z = \begin{bmatrix} a_{1,1} \cdot \nu_1 \\ a_{2,1} \cdot \nu_1 \\ a_{3,1} \cdot \nu_1 \\ \vdots \\ a_{n,1} \cdot \nu_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1,2} \cdot \nu_2 \\ a_{2,2} \cdot \nu_2 \\ a_{3,2} \cdot \nu_2 \\ \vdots \\ a_{n,2} \cdot \nu_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1,3} \cdot \nu_3 \\ a_{2,3} \cdot \nu_3 \\ a_{3,3} \cdot \nu_3 \\ \vdots \\ a_{n,3} \cdot \nu_3 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1,k} \cdot \nu_k \\ a_{2,k} \cdot \nu_k \\ a_{3,k} \cdot \nu_k \\ \vdots \\ a_{n,k} \cdot \nu_k \end{bmatrix}.$$

Při bližším ohledání pak zjistíme, že všechny složky prvního vektoru jsou násobkem stejného čísla, a sice čísla ν_1. Všechny složky druhého vektoru jsou opět násobkem stejného čísla, a sice čísla ν_2, a tak dále. Obecně zřejmě platí, že všechny složky ℓ-tého vektoru jsou násobkem čísla ν_ℓ, pro všechna $\ell = 1, 2, \dots, k$.

Protože víme, jak vektor násobit číslem (opět po složkách), umíme i vektor, jehož každá složka je násobkem nějakého konkrétního čísla, napsat jako součin jiného vektoru a onoho konkrétního čísla. Dostáváme tedy

$$z = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{bmatrix}}_{a_1} \cdot \nu_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{bmatrix}}_{a_2} \cdot \nu_2 + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \\ a_{3,3} \\ \vdots \\ a_{n,3} \end{bmatrix}}_{a_3} \cdot \nu_3 + \cdots + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,k} \\ a_{2,k} \\ a_{3,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{bmatrix}}_{a_k} \cdot \nu_k,$$

kde a_ℓ je ℓ-tý sloupec matice A. Ve finále tedy dostáváme důležitou rovnost

$$A \cdot v = \sum_{\ell=1}^{k} a_\ell \cdot \nu_\ell.$$

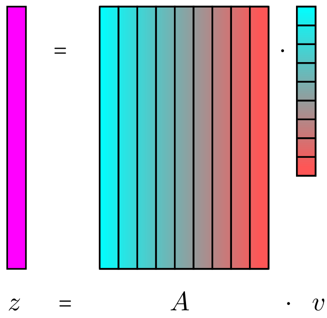
Převyprávěno lidskými slovy:

Součin matice A a vektoru v je lineární kombinací sloupců matice A, koeficienty lineární kombinace jsou přitom rovny složkám vektoru v.

Tuto důležitou interpretaci součinu matice a vektoru jsme se pokusili ilustrovat obrázkem 2.3 (stejnobarevné boxíky se násobí a tyto součiny se sčítají).

Poznámka 2.1 (Informaticko-programátorský dovětek)**.** *Pokusíme-li se naprogramovat součin matice a vektoru, zřejmě použijeme právě dva for-cykly. Jeden bude procházet složky výsledného vektoru a další bude řídit výpočet sumy.*

Všimněme si, že pořadí obou for-cyklů můžeme bez problémů zaměnit. Tato záměna, resp. dvě možná pořadí for-cyklů odpovídají právě dvěma interpretacím, či pohledům na MV-součin: skalární součin řádků matice A s vektorem v, resp. lineární kombinace sloupců matice A s koeficienty zapsanými ve vektoru v; srovnej algoritmy 1 a 2.



Obrázek 2.3: Součin z matice A a vektoru v je lineární kombinací sloupců matice A, koeficienty lineární kombinace jsou přitom rovny složkám vektoru v (tj. stejnobarevné boxíky se násobí a tyto součiny se sčítají).

Algoritmus 1: MV-součin jako soubor skalárních součinů řádků matice A a vektoru v.

vstup : $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $v \in \mathbb{R}^k$
výstup : $z = A \cdot v \in \mathbb{R}^n$
$z \leftarrow 0_n$
for $j = 1, \ldots, n$ **do**
  for $\ell = 1, \ldots k$ **do**
    $\zeta_j \leftarrow \zeta_j + a_{j,\ell} \cdot \nu_\ell$
  end
end

Algoritmus 2: MV-součin jako lineární kombinace sloupců matice A s koeficienty z vektoru v.

vstup : $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $v \in \mathbb{R}^k$
výstup : $z = A \cdot v \in \mathbb{R}^n$
$z \leftarrow 0_n$
for $\ell = 1, \ldots k$ **do**
  for $j = 1, \ldots, n$ **do**
    $\zeta_j \leftarrow \zeta_j + a_{j,\ell} \cdot \nu_\ell$
  end
end

2.2 Součin dvou matic (MM-součin)

Když už umíme násobit matici a vektor, dalším přirozeným krokem bude násobení dvou matic. Vzhledem k tomu, že celou aritmetiku matic budujeme tak, aby vektor hrál v podstatě roli matice s jediným sloupcem, lze očekávat, že součin matice a vektoru bude jen speciálním případem součinu dvou matic.

Z toho důvodu, podobně jako v případě součinu matice a vektoru, nepůjde vynásobit zcela libovolnou dvojici matic. Součin bude definovaný pouze pro matice splňující *podmínku kompatibility*, kterou můžeme slovně vyjádřit jako:

Počet sloupců první matice součinu musí být roven počtu řádků druhé matice součinu.

2.2.1 MM-součin — definice a příklady užití

Součin tedy budeme definovat pro dvojici matic

$$A \in \mathbb{R}^{n\times k} \quad \text{a} \quad B \in \mathbb{R}^{k\times m}.$$

Definovaný bude opět, s využitím společného rozměru k, jako součet součinů odpovídajících si prvků.

Definice 2.2 (Maticový součin (MM-součin)). *Součinem matice A velikosti $n \times k$,*

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,k} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times k}, \ \textit{resp.}\ \mathbb{C}^{n\times k},$$

a matice B velikosti $k \times m$

$$B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \cdots & b_{1,m} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \cdots & b_{2,m} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & \cdots & b_{3,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k,1} & b_{k,2} & b_{k,3} & \cdots & b_{k,m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times m}, \ \textit{resp.}\ \mathbb{C}^{k\times m},$$

rozumíme matici C velikosti $n \times m$,

$$C = A \cdot B \in \mathbb{R}^{n\times m}, \ \textit{resp.}\ \mathbb{C}^{n\times m}$$

jejíž (j,r)-tá složka $c_{j,r} = (C)_{j,r}$ je dána vztahem

$$c_{j,r} = \sum_{\ell=1}^{k} a_{j,\ell} \cdot b_{\ell,r} = a_{j,1} \cdot b_{1,r} + a_{j,2} \cdot b_{2,r} + a_{j,3} \cdot b_{3,r} + \cdots + a_{j,k} \cdot b_{k,r}.$$

Na (j,r)-tou složku součinu $C = A \cdot B$ se tedy můžeme (alespoň v reálných číslech) dívat jako na skalární součin j-tého řádku matice A s r-tým sloupcem matice B (aby nedošlo k mýlce, poznamenejme, že MM-součin je pro reálné a komplexní matice definován zcela stejně; to, co se v komplexním světě liší, je definice skalárního součinu). Schematicky můžeme součin matice a vektoru znázornit obrázkem 2.4.

Příklad 2.3. *Jako příklad součinu dvou matic sáhneme opět k maticím rotace, tedy ke Givensovým rotacím. Uvažujme součin*

$$G(\varphi) \cdot G(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\varphi)\cdot\cos(\psi) - \sin(\varphi)\cdot\sin(\psi) & -\cos(\varphi)\cdot\sin(\psi) - \sin(\varphi)\cdot\cos(\psi) \\ \sin(\varphi)\cdot\cos(\psi) + \cos(\varphi)\cdot\sin(\psi) & -\sin(\varphi)\cdot\sin(\psi) + \cos(\varphi)\cdot\cos(\psi) \end{bmatrix}$$

Vzpomeneme-li si na vzorce pro kosinus, resp. sinus součtu úhlů, vidíme, že výslednou matici můžeme zapsat jako

$$G(\varphi+\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{bmatrix}.$$