

Finanční matematika pro každého

7. aktualizované vydání

Jarmila Radová, Petr Dvořák, Jiří Málek

věcné a matematické
vysvětlení základních
finančních pojmů

metody pro praktické
rozhodování soukromých
osob i podnikatelů

nové finanční produkty

výborná učebnice
pro studenty středních
a vysokých škol

Upozornění pro čtenáře a uživatele této knihy

Všechna práva vyhrazena. Žádná část této tištěné či elektronické knihy nesmí být reprodukována a šířena v papírové, elektronické či jiné podobě bez předchozího písemného souhlasu nakladatele. Neoprávněné užití této knihy bude **trestně stíháno**.

Používání elektronické verze knihy je umožněno jen osobě, která ji legálně nabyla a jen pro její osobní a vnitřní potřeby v rozsahu stanoveném autorským zákonem. Elektronická kniha je datový soubor, který lze užívat pouze v takové formě, v jaké jej lze stáhnout s portálu. Jakékoliv neoprávněné užití elektronické knihy nebo její části, spočívající např. v kopírování, úpravách, prodeji, pronajímání, půjčování, sdělování veřejnosti nebo jakémkoliv druhu obchodování nebo neobchodního šíření je zakázáno! Zejména je zakázána jakákoliv konverze datového souboru nebo extrakce části nebo celého textu, umístování textu na servery, ze kterých je možno tento soubor dále stahovat, přitom není rozhodující, kdo takovéto sdílení umožnil. Je zakázáno sdělování údajů o uživatelském účtu jiným osobám, zasahování do technických prostředků, které chrání elektronickou knihu, případně omezují rozsah jejího užití. Uživatel také není oprávněn jakkoliv testovat, zkoušet či obcházet technické zabezpečení elektronické knihy.





Copyright © Grada Publishing, a.s.

Edice Osobní a rodinné finance

**doc. RNDr. Jarmila Radová, Ph.D., doc. Ing. Petr Dvořák, Ph.D.,
doc. Mgr. Jiří Málek, Ph.D.**

Finanční matematika pro každého 7. aktualizované vydání

Vydala GRADA Publishing, a.s.
U Průhonu 22, Praha 7,
jako svou 3 779. publikaci

Realizace obálky Jan Dvořák
Foto na obálce Allphoto
Sazba Antonín Plicka
Odpovědná redaktorka PhDr. Dana Pokorná
Počet stran 296
Sedmé vydání, Praha 1993, 1997, 2001, 2003, 2005, 2007, 2009
Vytiskly Tiskárny Havlíčkův Brod, a.s.
Husova ulice 1881, Havlíčkův Brod

© GRADA Publishing, a.s., 2009

ISBN 978-80-247-3291-6 (tištěná verze)
ISBN 978-80-247-6904-2 (elektronická verze ve formátu) © Grada Publishing, a.s. 2011
GRADA Publishing: *tel.:* 220 386 401, *fax:* 220 386 400, *www.grada.cz*

Obsah

Předmluva	7
1. Základní pojmy	9
1.1 Procentový počet	9
1.2 Funkce	11
1.3 Průměry	18
1.4 Posloupnosti a řady	21
2. Úročení	24
2.1 Základní pojmy	24
2.2 Typy úročení	27
2.3 Jednoduché úročení polhůtní	27
2.4 Základní rovnice pro jednoduché polhůtní úročení	33
2.5 Současná a budoucí hodnota při jednoduchém úročení	36
2.6 Diskont	38
2.7 Vztah mezi polhůtní úrokovou sazbou a diskontní sazbou	40
3. Složené úročení	46
3.1 Základní rovnice pro složené úročení polhůtní	46
3.2 Kombinace jednoduchého a složeného úročení – smíšené úročení	51
3.3 Výpočet doby splatnosti	55
3.4 Současná hodnota při složeném úročení	57
3.5 Výpočet výnosnosti (úrokové sazby)	65
3.6 Výpočet úroku	66
3.7 Srovnání jednoduchého a složeného úročení	67
3.8 Efektivní úroková sazba	68
3.9 Úroková intenzita – spojitě úročení	70
3.10 Nominální a reálná úroková sazba	74
3.11 Hrubý a čistý výnos	75
4. Spoření	80
4.1 Spoření krátkodobé	80
4.2 Dlouhodobé spoření	89
4.3 Kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření	97
5. Důchody jako pravidelné platby z investice	108
5.1 Důchod bezprostřední	109
5.2 Důchod odložený	116
5.3 Důchod věčný	120
6. Splácení úvěru	127
6.1 Splácení úvěru stejnými splátkami (konstantní anuita)	129
6.2 Určení počtu předem daných konstantních anuit a poslední splátky úvěru	135
6.3 Úmor úvěru nestejnými splátkami	140
7. Směnky a směnečné obchody	152
7.1 Diskont a eskontní úvěr	153
7.2 Eskont směnek na základě střední doby splatnosti	157
7.3 Depozitní směnky	159

8. Skonto	162
8.1 Srovnání absolutní výše skonta a úroku	163
8.2 Srovnání relativní výše skonta a úroku	164
9. Běžné účty	166
9.1 Metody výpočtu úroků na běžných účtech	166
9.2 Zůstatkový způsob	166
9.3 Postupný způsob	168
9.4 Zpětný způsob	168
10. Hypoteční úvěry	170
10.1 Stanovení výše hypotečního úvěru	171
10.2 Splácení hypotečních úvěrů	173
10.3 Státní finanční podpora hypotečního úvěrování	175
11. Spotřebitelské úvěry	181
11.1 Úročení spotřebitelských úvěrů	182
12. Forfaiting, faktoring a leasing	186
12.1 Forfaiting	186
12.2 Faktoring	193
12.3 Leasing	197
13. Dluhopisy	202
13.1 Cena dluhopisu	205
13.2 Výnos z dluhopisů a jeho měření	211
13.3 Výnosové křivky	217
14. Durace, konvexita, imunizace	226
14.1 Durace pevně úročeného dluhopisu	226
14.2 Další typy durace	229
14.3 Konvexita	233
14.4 Imunizace	236
15. Měření výkonnosti portfolia	244
15.1 Časově vážené metody (TWR)	244
15.2 Peněžně vážené metody (MWR)	246
16. Akcie	250
16.1 Cena akcie	250
16.2 Předkupní právo	256
16.3 Výnos z akcií a jeho měření	262
17. Měnový kurz a devizové obchody	268
17.1 Způsob kotace měnových kurzů	268
17.2 Křížové kurzy	270
18. Finanční termínové obchody	274
18.1 Termínová úroková sazba	275
18.2 Termínová cena cenného papíru	278
18.3 Termínový měnový kurz	279
18.4 Termínové obchody v praxi	286
Literatura	289
Rejstřík	291

Předmluva

I sedmé, aktualizované vydání *Finanční matematiky pro každého* se drží osvědčených principů, na kterých byla založena vydání předchozí. To znamená, že srozumitelným způsobem vysvětluje základní matematické postupy využívané v bankovní a finanční praxi širokému okruhu čtenářů.

Knížka se snaží důsledně naplnit to, že by měla být určena skutečně *pro každého*, kdo se z jakéhokoliv důvodu zajímá o finanční matematiku. Nabízí proto jak spolehlivého průvodce při prvních krocích do tajů finančních výpočtů, aniž musí čtenář mít rozsáhlé matematické či ekonomické znalosti, tak může být i cenným rádcem profesionálovi při objasnění matematického základu finančních produktů.

Je koncipována jako učebnice a vychází ze zkušeností autorů při výuce na Vysoké škole ekonomické v Praze. Je proto vhodná pro studenty vysokých, vyšších odborných či středních škol s ekonomickým zaměřením. Snadno se v ní však budou orientovat i ti, kteří si budou chtít doplnit v dnešní době nezbytné znalosti samostudiem.

Obsah knížky je možné rozdělit do dvou celků. První, kapitoly 1 až 6, vysvětluje matematické metody a postupy, které jsou využívány v oblasti financí. Druhý celek, kapitoly 7 až 18, je potom zaměřen na konkrétní aplikace těchto postupů u všech důležitých bankovních a finančních produktů. Nové vydání aktualizuje a doplňuje obsah kapitol z předchozích vydání, nově je zde zařazena kapitola věnovaná vybraným problémům z oblasti řízení portfolia.

Výklad v jednotlivých kapitolách je nejdříve veden v obecné rovině, následně je demonstrován na praktickém příkladě, který je doprovázen i vzorovým řešením.

Pro rychlou orientaci a snadné hledání odpovědi na určitou otázku obsahuje knížka podrobný věcný rejstřík.

Věříme, že *Finanční matematika pro každého* poskytne každému, kdo ji otevře, zajímavé informace, které využije při finančním rozhodování v podnikání či správě svých soukromých financí.

1. Základní pojmy

Finanční matematika není nic jiného než využití matematiky ve finanční oblasti. V textu se proto budeme setkávat s některými matematickými pojmy a postupy. Pro ty, kteří potřebují zopakovat základy matematiky, potřebné ve finanční matematice, je určena úvodní kapitola.

1.1 Procentový počet

Slovo **procento** je latinského původu a znamená setinu celku nebo základu.

Základem procentového počtu je skutečnost, že velikost dané veličiny neuvádíme absolutně v daných jednotkách, ale relativně (poměrně). To znamená, že uvedeme její poměr k velikosti odpovídající veličiny (vyjádřené ve stejných jednotkách), kterou jsme zvolili za základ.

Pro jedno procento potom platí:

$$1\% = \frac{1}{100},$$

tzn. jedno procento je jedna setina ze základu = 0,01 základu; potom:

$$100\% = 1 \text{ celek} = \text{celý základ.}$$

V jednoduchých úlohách s procenty se objevují tři základní veličiny:

- základ (budeme označovat z);
- počet procent (budeme označovat p);
- procentová část, která je vyjádřením části, odpovídající počtu procent v absolutních jednotkách (budeme označovat x).

Při výpočtu známe dva údaje a třetí údaj počítáme. Podle toho rozlišujeme tři základní typy úloh:

1. výpočet procentové části x ;
2. výpočet základu z ;
3. výpočet počtu procent p .

Výpočet neznámé v jednotlivých typech úloh provádíme podle následujících vzorců:

$$x = z \cdot \frac{p}{100}, \quad (1-1)$$

$$z = \frac{x \cdot 100}{p}, \quad (1-2)$$

$$p = \frac{x \cdot 100}{z}, \quad (1-3)$$

kde x je procentová část;
 z je základ;
 p je počet procent.

Jednou z možností výpočtu neznámého údaje v úlohách s procenty je i použití úměry neboli trojčlenky.

Příklad 1-1 Výpočet procentové části

Kolik činí sjednaný podíl na zisku ve výši 15 % z prodejní ceny, má-li výrobní cena výši 2 000 Kč a prodejní cena činí 115 % výrobní ceny?

Řešení

Nejprve vypočítáme, jak vysoká byla prodejní cena. To je problém výpočtu procentové části podle vztahu (1-1). Dosadíme $z = 2\,000$, $p = 115\%$. Potom:

$$x = z \cdot \frac{p}{100} = 2\,000 \cdot \frac{115}{100} = 2\,300.$$

Prodejní cena činila 2 300 Kč.

Nyní potřebujeme zjistit, kolik činí podíl na zisku ve výši 15 % z prodejní ceny. Opět počítáme procentovou část. Nyní dosadíme $p = 15\%$, $z = 2\,300$:

$$x = z \cdot \frac{p}{100} = 2\,300 \cdot \frac{15}{100} = 345.$$

Zisk činí 345 Kč.

Příklad 1-2 Výpočet základu v procentovém počtu

Daň z příjmu činila při sazbě daně 27,5 % částku 1 170 Kč. Jak vysoký byl příjem (od odpočitatelných položek abstrahujeme)?

Řešení

Kromě výše uvedených vzorců je možno použít trojčlenku:

27,5 % odpovídá 1 170 Kč;

100 % odpovídá z Kč.

Sestavíme rovnost:

$$\frac{z}{1170} = \frac{100}{27,5};$$

$$z = \frac{100}{27,5} \cdot 1170 = 4\,254,54.$$

Hrubý příjem činil 4 255 Kč.

1.2 Funkce

Dříve, než budeme zjednodušeně definovat pojem funkce, seznámíme se s pojmem **proměnná**. Jestliže říkáme, že celková cena zboží závisí na jeho množství, pak proměnné jsou množství a celková cena, konstanta (konstantní veličina) je cena za jednotkové množství. Označíme-li celkovou cenu y , množství zboží x a cenu za jednotkové množství c , pak x, y jsou v tomto případě proměnné a c je konstanta.

Funkcí budeme rozumět předpis, kterým jednoznačně přiřadíme určité hodnotě proměnné x určitou hodnotu proměnné y . Píšeme potom:

$$y = f(x).$$

Proměnnou x nazýváme **nezávisle proměnná** a proměnnou y nazýváme **závisle proměnná**. Hodnota proměnné y závisí na hodnotě proměnné x .

Máme-li např. cenu za 1 kg banánů 28 Kč, pak celková cena nakoupeného množství banánů bude záviset právě na hmotnosti banánů, které nakoupíme.

Podle výše uvedeného příkladu bude tedy hmotnost zboží x nezávisle proměnná a celková cena y závisle proměnná.

Funkce bude mít v tomto jednoduchém případě tvar:

$$y = 28 \cdot x.$$

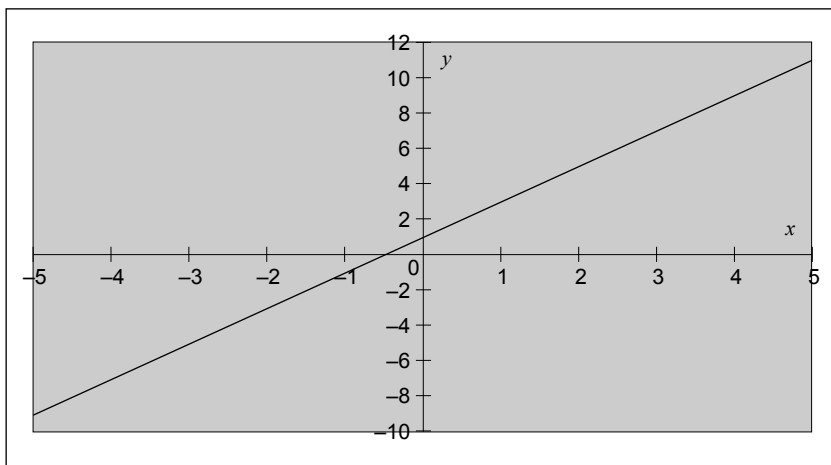
V našem textu se setkáme s několika funkcemi, které si nyní dále popíšeme, neboť nám budou později užitečné.

1.2.1 Lineární funkce

Funkční předpis pro lineární funkci bude mít tvar:

$$y = k \cdot x + q, \quad (1-4)$$

kde k, q jsou konstanty;
 x je nezávisle proměnná;
 y je závisle proměnná.



Obrázek 1.1 Graf lineární funkce $y = 2 \cdot x + 1$

Graficky je možno tuto funkci znázornit přímkou. Konstanta k určuje směr přímky a konstanta q určuje průsečík s osou y .

Lineární funkci můžeme ukázat třeba na příkladu poplatků za telefon. Paušální platba, nezávislá na počtu uskutečněných hovorů, je konstanta q , konstanta k je cenou za jeden impuls a nezávisle proměnnou x je počet uskutečněných impulsů. Závisle proměnná y je potom výše celkového poplatku za telefon.

V ekonomických úvahách se často užívá závislosti zvané **přímá úměrnost**, která je znázorněna právě lineární funkcí.

Říkáme, že dvě veličiny jsou přímo úměrné, jestliže podíl každých dvou odpovídajících si hodnot y_i/x_i je roven konstantě. Tedy:

$$\frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1}{x_1} = k.$$

Funkční předpis je tedy dán vzorcem:

$$y = k \cdot x. \tag{1-5}$$

Grafem je přímka, procházející počátkem (průsečíkem os x a y). Známe-li konstantu k , můžeme ke kterékoli hodnotě x_i vypočítat hodnotu y_i .

Předchozí příklad by byl přímou úměrností, jestliže by telefonní poplatky neobsahovaly paušální platbu.

1.2.2 Rovnoosá hyperbola

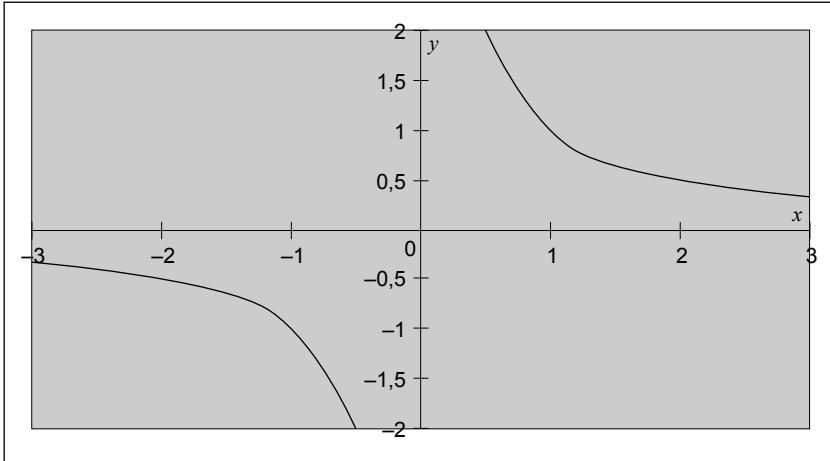
Dále se v ekonomických úvahách setkáváme se závislostí zvanou **nepřímá úměrnost**. Říkáme, že dvě veličiny jsou nepřímo úměrné, jestliže součin každých dvou odpovídajících si hodnot $x_i \cdot y_i$ je roven konstantě. Tedy:

$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 = k.$$

Funkční předpis je v tomto případě dán vzorcem:

$$y = \frac{k}{x}. \tag{1-6}$$

Grafem nepřímé úměrnosti je hyperbola. V případě, že $k = 1$, se nazývá rovnoosá.



Obrázek 1.2 Graf rovnoosé hyperboly

V našem příkladu s telefony (bez paušální platby, tj. $q = 0$) jsme řekli, že celkový poplatek za telefon (y) je dán součinem ceny za jeden impuls (k) a počtu uskutečněných impulsů (x), to je:

celkový poplatek $y = \text{cena impulsu } k \cdot \text{počet impulsů } x$.

Celkový poplatek y je přímo úměrný ceně za jeden impuls k .

Pokud budeme však naopak znát celkový poplatek a cenu jednoho impulsu a budeme chtít zjistit počet uskutečněných impulsů, můžeme tak učinit dosazením do vzorce:

$$\text{počet impulsů} = \frac{\text{celkový poplatek}}{\text{cena za jeden impuls}}.$$

Vidíme, že počet impulsů je (při daném celkovém poplatku) nepřímo úměrný ceně za jeden impuls.

1.2.3 Exponenciální funkce

Exponenciální funkcí budeme rozumět funkci, kde nezávisle proměnná se vyskytuje jako exponent. To znamená, že ji můžeme psát ve tvaru:

$$y = a^x, \quad (1-7)$$

kde $a > 0$, x je racionální číslo¹.

Z matematiky víme, že každé reálné číslo² umocněné na nultou se rovná jedné. Z toho můžeme pro exponenciální křivky odvodit zajímavou vlastnost. Pro všechna a platí, že pro $x = 0$ se rovná $a^x = 1$. Z toho vyplývá, že všechny exponenciální křivky procházejí bodem $(0,1)$, který leží na ose y .

Speciální průběh má exponenciální funkce, je-li a rovno jedné ($a = 1$). Pak pro všechna x platí, že y se rovná také jedné ($y = 1$), neboť číslo jedna umocněné na libovolné číslo je opět číslo jedna. Grafem je v tomto případě přímka rovnoběžná s osou x .

Funkční hodnoty exponenciální funkce y budou pro libovolné hodnoty proměnné x kladné.

Speciálním případem je funkce:

$$y = e^x,$$

kde e představuje tzv. **Eulerovo číslo**, definované pomocí limity³ jako:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad (1-8)$$

což budeme potřebovat v oddílu 3.9 při definici úrokové intenzity.

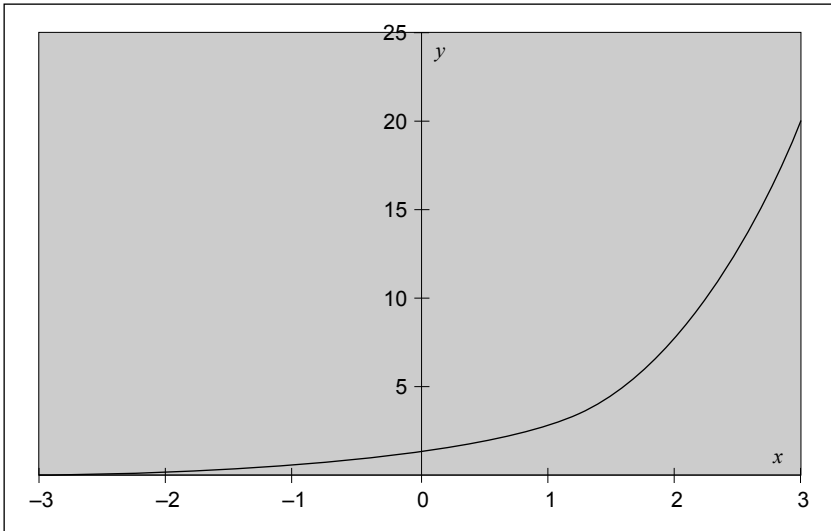
¹ **Racionální číslo** je číslo, které je možno vyjádřit jako podíl dvou celých čísel. **Celá čísla** jsou čísla: ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... Celá kladná čísla nazýváme **přirozená čísla**.

² **Reálné číslo** je jak číslo racionální, tak číslo, které není možno napsat ve tvaru podílu dvou celých čísel (**číslo iracionální**), např. $\sqrt{2}$.

³ Zde se jedná o limitu posloupnosti (viz oddíl 1.4).

Exponenciální funkci použijeme v oddílu 3.1 při odvozování problematiky složeného úročení.

Příklad exponenciální funkce je znázorněn grafem na obrázku 1.3.



Obrázek 1.3 Graf exponenciální funkce $y = e^x$

1.2.4 Logaritmická funkce

Logaritmická funkce je funkcí inverzní k funkci exponenciální. Inverzní funkcí rozumíme funkci, kde původní závisle proměnná se stala nezávisle proměnnou a naopak. Logaritmickou funkci zapisujeme:

$$y = \log_a x, \quad (1-9)$$

kde nazýváme:

- $x \in (0, \infty)$ číslo logaritmované;
- $a \neq 1$ základ logaritmu;
- y logaritmus.

Logaritmus y je číslo, kterým když umocníme základ a , dostaneme logaritmované číslo x . To znamená, že platí:

$$a^y = x.$$

Hodnoty nezávisle proměnné x logaritmické funkce musejí být vždy kladné, neboť odpovídají hodnotám závisle proměnné exponenciální funkce, která je inverzní funkcí k funkci logaritmické. Jak jsme viděli, byly funkční hodnoty závisle proměnné exponenciální funkce vždy kladné.

Všechny logaritmické křivky analogicky jako křivky exponenciální procházejí pro všechny hodnoty a stejným bodem, který v případě logaritmických křivek leží na ose x , bodem $(1,0)$.

Pro naše účely budeme užívat **přirozený logaritmus**, kde $a = e$ a e je již zmíněné Eulerovo číslo.

Zapisujeme:

$$y = \log_e x = \ln x.$$

Je-li základ logaritmu a roven deseti ($a = 10$), hovoříme o **dekadickém logaritmu**. Pak píšeme:

$$y = \log_{10} x.$$

Tedy:

$$y = 10^y.$$

Průběh logaritmické funkce pro $a = e$ je znázorněn grafem na obrázku 1.4.