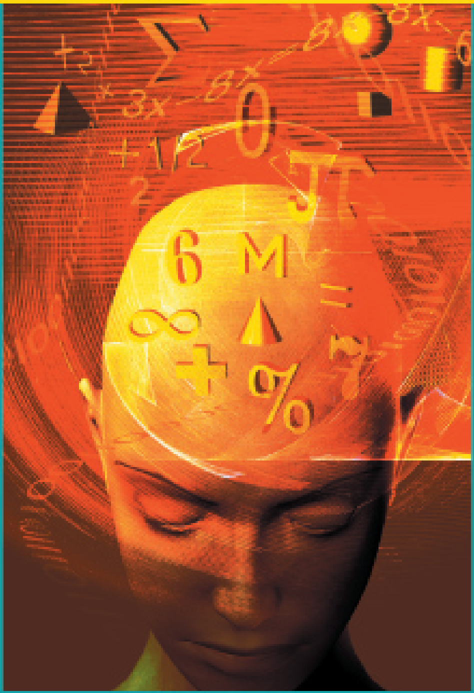
Jiří Moučka
Petr Rádl

Matematika pro studenty ekonomie



- Lineární algebra
- Diferenciální a integrální počet
- Diferenciální rovnice
- Diferenční rovnice
- Teorie a 238 řešených příkladů

GRADA

Doc. RNDr. Jiří Moučka, Ph.D.
RNDr. Petr Rádl

Matematika pro studenty ekonomie

Vydala Grada Publishing, a.s.
U Průhonu 22, 170 00 Praha 7
tel.: +420 234 264 401, fax: +420 234 264 400
www.grada.cz
jako svou 4136. publikaci

Odborná recenze:
Prof. RNDr. Jan Chvalina, DrSc.
Doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.

Vydání odborné knihy schválila Vědecká redakce
nakladatelství Grada Publishing, a.s.

Odpovědný redaktor Petr Somogyi
Sazba Petr Somogyi
Počet stran 272
První vydání, Praha 2010
Vytiskly Tiskárny Havlíčkův Brod, a.s.

ISBN 978-80-247-3260-2 (tištěná verze)
ISBN 978-80-247-7512-8 (elektronická verze ve formátu PDF) © Grada Publishing, a.s. 2012

Obsah

O autorech

Doc. RNDr. Jiří Moučka, Ph.D.

Vystudoval odbornou matematiku na přírodovědecké fakultě UJEP v Brně (1974). V rámci doktorského postgraduálního studia na Masarykově univerzitě v Brně studoval vlastnosti diskrétních algebraických struktur (1997). Touto problematikou se zabýval i ve své habilitační práci, která byla zaměřena na aplikaci diskrétních matematických struktur pro modelování procesů (2002).

Pedagogicky působil na Fakultě ekonomiky obrany státu VVŠ PV ve Vyškově, na Fakultě ekonomiky a managementu Univerzity obrany v Brně a na Provozně ekonomické fakultě Mendelovy univerzity v Brně. Přednášel především matematiku pro studenty ekonomických specializací, operační analýzu a ekonomicko-matematické metody. Zpracoval řadu studijních textů a skript zaměřených na základní kurz vyšší matematiky, teorii her a lineární programování. Je autorem a spoluautorem několika desítek odborných článků v oblasti teorie algebraických hyperstruktur a matematického modelování. V současné době je proděkanem pro studijní a pedagogickou činnost na Fakultě ekonomiky a managementu Univerzity obrany v Brně.

RNDr. Petr Rádl

Vystudoval Přírodovědeckou fakultu Masarykovy univerzity v Brně, obor matematika a deskriptivní geometrie (1972). Zde také v roce 1981 složil státní rigorózní zkoušku. Po absolvování základní vojenské služby je od roku 1973 zaměstnán na Mendelově univerzitě v Brně. Působil na Ústavu matematiky Lesnické a dřevařské fakulty, v letech 2004–2007 byl vedoucím tohoto ústavu.

Přednášel matematiku, konstruktivní geometrii a technické kreslení v různých studijních programech prezenční i kombinované formy studia na všech fakultách univerzity a je spoluautorem skript používaných ke studiu těchto předmětů. Řadu let byl garantem přijímacích zkoušek z matematiky na Mendelovu univerzitu a je vedoucím autorského kolektivu Sbírky příkladů z matematiky pro přijímací řízení. Od roku 2008 působí na Ústavu statistiky a operačního výzkumu Provozně ekonomické fakulty a přednáší matematiku studentům této fakulty. Od roku 1992 externě přednáší technické kreslení na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně, kde je také členem komise pro státní závěrečné zkoušky ve studijním programu Matematika a Aplikovaná matematika.

Úvod

Znalost exaktních metod ekonomických teorií by měla v současné době patřit k nezbytné výbavě každého pracovníka na jakékoliv úrovni ekonomické praxe. Z toho pro něj jednoznačně vyplývá nutnost seznámit se s jejich matematickými základy.

Stěžejním cílem autorů této učebnice, stejně jako cílem výuky matematiky na ekonomických fakultách, je poskytnout studentům základní znalosti vyšší matematiky využitelné při studiu navazujících ekonomicko-matematických předmětů a při studiu kvantitativních metod aplikovaných v odborných ekonomických disciplínách.

Učebnice je rozdělena do šesti kapitol, které na sebe logicky navazují. Pro úspěšné studium určité kapitoly je nezbytné zvládnutí látky z předchozích kapitol. Vždy se přitom požaduje znalost středoškolské matematiky v obvyklém rozsahu. V každé kapitole je formou definic a vět bez důkazů shrnuta potřebná teorie. Způsob výkladu je přitom přizpůsoben odbornému zaměření studentů, kteří nestudují matematiku jako takovou, ale potřebují ji umět vhodně využívat. Přímo v základním textu jsou probírané pojmy a metody ilustrovány množstvím řešených příkladů. Další úlohy, označené jako cvičení, jsou určeny k samostatnému řešení. Výsledky těchto cvičení jsou uvedeny na konci knihy. Definice, věty, příklady i obrázky jsou vždy označeny dvojicí číslic, z nichž první značí pořadové číslo kapitoly a druhá jejich pořadí uvnitř kapitoly. Značkou ■ jsou v textu kvůli větší přehlednosti označeny konce definic, vět a příkladů včetně jejich řešení.

Učebnice je určena především studentům prezenční i kombinované formy studia Provozně ekonomické fakulty Mendlovy univerzity v Brně a Fakulty ekonomiky a managementu Univerzity obrany v Brně. Její obsah jednoznačně koresponduje se stávajícím studijním plánem prvních dvou semestrů studia na zmíněných fakultách, kde oba autoři pedagogicky působí. Byla koncipována na základě skript a učebních textů, které jsou zaměřeny na dílčí části probírané problematiky a které byly používány při výuce základního kurzu matematiky na obou fakultách v posledním desetiletí. Zkušenosti z jejich používání, připomínky a názory jejich autorů i uživatelů byly při tvorbě této knihy využity a autoři za ně touto cestou srdečně děkují. Jedním z důležitých motivů vzniku předkládaného textu bylo shrnout celý obsah základního matematického kurzu do jediné učebnice, jejíž prostudování umožní studentům úspěšné zvládnutí předmětu Matematika.

Vzhledem k tomu, že mnohé další ekonomické fakulty v České republice mají ve svých studijních programech základní kurz vysokoškolské matematiky podobného obsahu i rozsahu, je možné, že po této učebnici sáhnou i studenti jiných vysokých škol, především ekonomického zaměření.

Všechny liché kapitoly napsal doc. RNDr. Jiří Moučka, Ph.D., autorem sudých kapitol je RNDr. Petr Rádl.

Za mnohé cenné rady a připomínky autoři děkují doc. RNDr. Josefu Kalasovi, CSc., RNDr. Ludmile Staré a RNDr. Milanu Vágnerovi.

Brno, srpen 2010 Autoři

KAPITOLA 1

Lineární algebra

Lineární algebra, jejíž základy se v této kapitole studují, se začala vytvářet jako samostatná matematická disciplína v 18. století, kdy byl zaveden pojem determinantu a ukázána metoda řešení soustavy n lineárních rovnic o n neznámých. V polovině 19. století se poprvé objevuje pojem matice a další metody řešení soustav lineárních rovnic. Lineární algebra však není pouze teoretickou matematickou disciplinou. Typická je její aplikovatelnost a široké použití v praxi. Bezprostředně je využíváno metod lineární algebry v lineárním programování, jež řeší celou řadu úloh ekonomického charakteru.

1.1 Základní pojmy z teorie množin

V úvodním odstavci uvádíme přehled základních pojmů teorie množin v míře nezbytně nutné pro pochopení všech dalších úvah. **Množinou** M rozumíme souhrn určitých objektů chápaný jako samostatný celek. Tyto objekty nazýváme **prvky množiny** a značíme a, b, x, y. Zápisem $a \in M$, resp. $a \notin M$ rozumíme, že a je, resp. a není prvkem množiny M. Pro každý objekt a a množinu M platí právě jedna z možností $a \in M$ nebo $a \notin M$. Množinu, která nemá žádný prvek, značíme symbolem $\emptyset$ a říkáme jí **prázdná množina**. Množinu, která je souhrnem prvků $b_1,\dots,b_n$ označujeme symbolem $\{b_1,\dots,b_n\}$.

Ze střední školy jsou dále známy tyto zápisy a jejich význam:

- $A = B$ – **rovnost** množin A, B,
- $A \subseteq B$ – množina A je **podmnožina** množiny B,
- $A \cap B$ – **průnik** množin A, B,
- $A \cup B$ – **sjednocení** množin A, B,
- $A - B$ – **rozdíl** množin A, B, tedy množina právě těch prvků $x \in A$, pro které platí $x \notin B$.

Nechť M_1, M_2 jsou dvě množiny. Množina všech uspořádaných dvojic (x_1, x_2), kde $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$, se nazývá **kartézský součin** množin M_1, M_2 a značí se $M_1 \times M_2$. Jsou-li M_1, M_2 libovolné množiny, pak **binární relací** z množiny M_1 do množiny M_2 nazýváme každou podmnožinu kartézského součinu $M_1 \times M_2$.

Zobrazením f **z množiny** M_1 **do množiny** M_2 nazýváme každou binární relaci $f \subseteq M_1 \times M_2$ takovou, že každému prvku $x_1 \in M_1$ je přiřazen nejvýše jeden prvek $x_2 \in M_2$ s vlastností $(x_1, x_2) \in f$. Je-li při zobrazení f z množiny M_1 do množiny M_2 každému prvku $x_1 \in M_1$ přiřazen právě jeden prvek $x_2 \in M_2$, mluvíme o **zobrazení** f **množiny** M_1 **do množiny** M_2. Jestliže při zobrazení f z množiny M_1 do množiny M_2 existuje ke každému prvku $x_2 \in M_2$ alespoň jeden prvek $x_1 \in M_1$ tak, že $(x_1, x_2) \in f$, mluvíme o **zobrazení** f **z množiny** M_1 **na množinu** M_2. Jestliže je při zobrazení f z množiny M_1 do množiny M_2 každému prvku $x_1 \in M_1$ přiřazen právě jeden prvek $x_2 \in M_2$ a ke každému prvku $x_2 \in M_2$ existuje alespoň jeden prvek $x_1 \in M_1$ tak, že $(x_1, x_2) \in f$, mluvíme o **zobrazení** f **množiny** M_1 **na množinu** M_2.

Důležitou roli v matematice i v jiných vědách hraje pojem operace. **Binární operací** v množině M rozumíme každé zobrazení, které každé uspořádané dvojici

$(a,b) \in M$ přiřazuje nejvýše jeden prvek $c \in M$. Označíme-li binární operaci (dále jen operace) symbolem $\square$, můžeme psát $a \square b = c$.

Operaci $\square$ nazýváme **komutativní** právě tehdy, když pro každé prvky $a, b \in M$ platí $a \square b = b \square a$. Operaci $\square$ nazýváme **asociativní** právě tehdy, když pro každé prvky $a, b, c \in M$ platí $(a \square b) \square c = a \square (b \square c)$. Existuje-li v množině M takový prvek e, že pro každé $x \in M$ platí rovnost $x \square e = e \square x = x$, nazývá se tento prvek **neutrální** vzhledem k operaci $\square$. Je-li e neutrální prvek vzhledem k operaci $\square$ a existuje-li k prvku $a \in M$ prvek $\overline{a} \in M$ s vlastností $a \square \overline{a} = \overline{a} \square a = e$, nazýváme prvek $\overline{a}$ **inverzní**, případně **opačný prvek** k prvku a na množině M.

Nejjednoduššími příklady komutativních a asociativních operací jsou běžné operace sčítání a násobení na množině $\mathbf{N}_0$. Při operaci sčítání hraje roli neutrálního prvku číslo 0, při operaci násobení číslo 1. Inverzní prvek k žádnému číslu však v množině přirozených čísel neexistuje ani vzhledem k operaci sčítání, ani vzhledem k násobení. V množině reálných čísel jsou obě operace komutativní i asociativní a vzhledem k oběma operacím má každý prvek $a \in M$ inverzní prvek $\overline{a}$. Při sčítání je $\overline{a} = -a$, při násobení $\overline{a} = \dfrac{1}{a}$, neutrální prvky jsou opět 0 a 1. S celou řadou jiných operací na různých množinách se budeme setkávat na dalších stranách této učebnice.

Pro označování základních číselných množin je všude použito pevných symbolů takto:

- $\mathbf{N}$ – množina všech přirozených čísel,
- $\mathbf{N}_0$ – množina všech přirozených čísel včetně nuly,
- $\mathbf{Z}$ – množina všech celých čísel,
- $\mathbf{R}$ – množina všech reálných čísel,
- $\mathbf{R}^+$ – množina všech reálných kladných čísel,
- $\mathbf{C}$ – množina všech komplexních čísel.

Cvičení

1.1 Rozhodněte, která tvrzení jsou pravdivá.

a) $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R}$, **b)** $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$, **c)** $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{R}$, **d)** $\mathbf{N} \cup \mathbf{Z} = \mathbf{R}$, **e)** $\mathbf{N} \cup \mathbf{Z} = \mathbf{Z}$, **f)** $\mathbf{N} \cap \mathbf{R} = \mathbf{R}$, **g)** $\mathbf{N} \cap \mathbf{R} = \mathbf{N}$, **h)** $\mathbf{N} - \mathbf{R} = \emptyset$, **i)** $\mathbf{N} - \mathbf{N} = \emptyset$, **j)** $\mathbf{N} - \mathbf{R} = \mathbf{R} - \mathbf{N}$. **k)** $1 \in \mathbf{N} \cap \mathbf{Z}$, **l)** $1 \in \mathbf{Z} - \mathbf{N}$.

1.2 Pro množiny $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{d,e,f\}$ sestrojte uvedené množiny.

a) $A \cap B$, **b)** $B \cap A$, **c)** $A \cup B$, **d)** $B \cup A$, **e)** $A - B$, **f)** $B - A$, **g)** $A \times B$, **h)** $B \times A$.

1.2 Vektorové prostory

1.2.1 Pojem vektorového prostoru

Definice 1.1 Množina V libovolných prvků, které značíme ***a, b, … x, y*** a říkáme jim vektory, se nazývá **vektorový prostor**, jestliže:

- Je dáno zobrazení $V \times V \to V$, jež každé uspořádané dvojici vektorů $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in V \times V$ přiřazuje vektor $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in V$ tak, že pro každé vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$ platí axiomy:

  (A1) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$,
  (A2) $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$,
  (A3) existuje vektor $\boldsymbol{o} \in V$ takový, že pro každý vektor $\boldsymbol{a} \in V$ platí $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{a}$,
  (A4) ke každému vektoru $\boldsymbol{a} \in V$ existuje vektor $\boldsymbol{a} \in V$ tak, že platí $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$.

  Toto zobrazení se nazývá **sčítání** na množině V a vektor $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ je **součet** vektorů ***a***, ***b***.

- Je dáno zobrazení **R** × $V \to V$, které každé uspořádané dvojici $(r, \boldsymbol{a}) \in \mathbf{R} \times V$ přiřazuje vektor $r\boldsymbol{a} \in V$ tak, že pro každá reálná čísla $r, s \in \mathbf{R}$ a každé vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ platí axiomy:

  (A5) $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$,
  (A6) $r(s\boldsymbol{a}) = rs(\boldsymbol{a})$,
  (A7) $(r + s)\boldsymbol{a} = r\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{a}$,
  (A8) $r(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = r\boldsymbol{a} + r\boldsymbol{b}$.

  Toto zobrazení se nazývá **násobení** vektoru **reálným číslem** a vektor $r\boldsymbol{a}$ se nazývá **reálný násobek** vektoru ***a***. ■

Místo pojmu vektorový prostor se lze v literatuře setkat také s názvem **lineární prostor**.

Podle uvedené definice je možné vektorový prostor formálně chápat jako trojici $(V, +, .)$, tedy množinu V, na níž jsou zavedeny operace sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem.

Operace sčítání je na množině V **komutativní** a **asociativní** – axiomy (A1) a (A2), množina V je neprázdná, neboť podle axiomu (A3) obsahuje vektor ***o***. Vektor ***o*** se nazývá **nulový vektor**, vektor –***a*** z axiomu (A4) je **vektor opačný** k vektoru ***a***. Násobení vektoru reálným číslem je podle axiomu (A6) **asociativní** a podle axiomů (A7), (A8) pro ně platí **distributivní** zákony.

Definice vektorového prostoru je značně obecná. Této definici vyhovuje celá řada množin s vhodně definovanými operacemi. Vektorovými prostory jsou například:

a) Množina všech reálných posloupností s obvyklým sčítáním a násobením čísel, tedy $\{a_n + b_n\} = \{a_n\} + \{b_n\}, \{ra_n\} = r\{a_n\}$.
b) Množina všech funkcí definovaných na libovolné neprázdné množině spolu s obvyklým sčítáním funkcí a násobením funkce reálným číslem, tedy $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(rf)(x) = rf(x)$.

c) Množina všech konvergentních posloupností.
d) Množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic.
e) Množina všech matic stejného typu.

Rovněž pojem vektoru jakožto prvku vektorového prostoru je v tomto pojetí velmi obecný. Vektorem může být uspořádaná n-tice reálných čísel, ale také reálná funkce, reálná posloupnost, matice, reálné číslo apod.

Příklad 1.1 Uvažujme množinu všech přirozených čísel **N**, na které definujeme součet přirozených čísel a reálný násobek přirozeného čísla obvyklým způsobem. Rozhodněme, zda množina **N** spolu s operací reálného násobku je vektorový prostor.

Řešení Aby množina **N** byla vektorovým prostorem, musí podle definice vektorového prostoru platit:

a) Pro všechny vektory ***a**, **b*** z množiny **N** je jejich součet ***a*** + ***b*** opět vektor z **N**, tedy množina **N** je uzavřená vzhledem ke sčítání.
b) Pro každé $r \in$ **R** je $r\boldsymbol{a} \in$ **N**, tedy množina **N**, je uzavřená vzhledem k násobení reálným číslem.
c) V množině **N** platí axiomy (A1) až (A8).

Zatímco podmínka a) je zřejmě splněna, podmínka b) splněna není, neboť např. pro $r = -1$, $\boldsymbol{a} = 2$ neplatí $r\boldsymbol{a} \in$ **N** a tedy množina **N** není uzavřená vůči násobení reálným číslem. Množina přirozených čísel **N** s obvykle definovanými operacemi tedy není vektorový prostor. ■

1.2.2 Aritmetický vektorový prostor

Definice 1.2 Uspořádanou n-tici reálných čísel $\boldsymbol{a} = (a_1,...,a_n)$, $n \in$ **N**, nazýváme ***n*-rozměrným aritmetickým vektorem**. Reálná čísla $a_1, a_2,...,a_n$ nazýváme souřadnicemi aritmetického vektoru ***a***. ■

Definice 1.3 Součtem aritmetických vektorů $\boldsymbol{a} = (a_1,...,a_n)$ a $\boldsymbol{b} = (b_1,...,b_n)$ nazýváme aritmetický vektor $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1,...,a_n + b_n)$. ■

Příklad 1.2 Pro aritmetické vektory $\boldsymbol{a} = (-1,6,14)$ a $\boldsymbol{b} = (1, -17, -13)$ je jejich součtem aritmetický vektor $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (0,-11,1)$. ■

Definice 1.4 Nechť $r \in$ **R**. **Reálným *r*-násobkem aritmetického vektoru** $\boldsymbol{a} = (a_1,...,a_n)$ je aritmetický vektor $r\boldsymbol{a} = (ra_1,...,ra_n)$. ■

Příklad 1.3 Pro aritmetické vektory $\boldsymbol{a} = (-1,6)$, $\boldsymbol{b} = (2, -4)$ platí $5\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} = (1,18)$. ■

Definice 1.5 Opačným aritmetickým vektorem k aritmetickému vektoru $\boldsymbol{a} = (a_1,...,a_n)$ nazýváme aritmetický vektor $-\boldsymbol{a} = (-a_1,...,-a_n)$. **Rozdílem aritmetických vektorů** $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ rozumíme součet aritmetického vektoru $\boldsymbol{a} = (a_1,...,a_n)$ a aritmetického vektoru opačného k aritmetickému vektoru $\boldsymbol{b} = (b_1,...,b_n)$, tedy $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}) = (a_1,...,a_n) + (-b_1,...,-b_n) = (a_1 - b_1,...,a_n - b_n)$. ■

Definice 1.6 Aritmetický vektor $\boldsymbol{o}$, jehož všechny souřadnice jsou rovny nule, tedy $\boldsymbol{o} = (0,...,0)$, nazýváme **nulovým aritmetickým vektorem**. ■

Označme nyní symbolem V_n množinu všech n-rozměrných aritmetických vektorů.

Věta 1.1 Jestliže na množině V_n definujeme součet aritmetických vektorů z V_n a reálný násobek aritmetického vektoru z V_n vztahy

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1,...,a_n + b_n),\ r\boldsymbol{a} = (ra_1,...,ra_n),$$

pak V_n je vektorový prostor. ■

Definice 1.7 Množina V_n všech aritmetických vektorů, na které jsou definovány operace sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem vztahy

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1,...,a_n + b_n) \text{ a } r\boldsymbol{a} = (ra_1,...,ra_n),$$

se nazývá n-rozměrný **aritmetický vektorový prostor**. ■

Z definice aritmetického vektorového prostoru a předcházející věty je zřejmé, že každý aritmetický vektorový prostor je vektorovým prostorem ve smyslu definice 1.2 a stejně tak každý aritmetický vektor je vektorem.

Mezi dvěma aritmetickými vektory $\boldsymbol{a} = (a_1,...,a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1,...,b_n)$ definujeme vztahy následujícími definicemi:

Definice 1.8 Řekneme, že aritmetický vektor $\boldsymbol{a} = (a_1,...,a_n)$ je **roven** aritmetickému vektoru $\boldsymbol{b} = (b_1,...,b_n)$ a píšeme $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, jestliže platí $a_j = b_j$ pro každé $j \in \{1,...,n\}$. ■

Definice 1.9 Řekneme, že aritmetický vektor $\boldsymbol{a} = (a_1,...,a_n)$ **dominuje** aritmetický vektor $\boldsymbol{b} = (b_1,...,b_n)$ a píšeme $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}$, jestliže platí $a_j \geq b_j$ pro každé $j \in \{1,...,n\}$, a přitom platí $a_j > b_j$ pro alespoň jedno $j \in \{1,...,n\}$. ■

Definice 1.10 Řekneme, že aritmetický vektor $\boldsymbol{a} = (a_1,...,a_n)$ **ostře dominuje** aritmetický vektor $\boldsymbol{b} = (b_1,...,b_n)$ a píšeme $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$, jestliže platí $a_j > b_j$ pro každé $j \in \{1,...,n\}$. ■

Příklad 1.4 Uvažujeme aritmetické vektory $\boldsymbol{a} = (3, -1, 7)$, $\boldsymbol{b} = (1, -3, 7)$, $\boldsymbol{c} = (2, -2, 2)$. Aritmetický vektor $\boldsymbol{a}$ dominuje aritmetický vektor $\boldsymbol{b}$, aritmetický vektor $\boldsymbol{a}$ pak ostře dominuje aritmetický vektor $\boldsymbol{c}$. Mezi aritmetickými vektory $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ neplatí žádný z výše uvedených vztahů. ■

Je důležité si uvědomit, že nerovnost $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{o}$ značí $x_1 \geq 0,...,x_n \geq 0$, kde přitom alespoň pro jedno $j \in \{1,...,n\}$ platí $x_j > 0$ a obdobně $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{o}$ vyjadřuje vztahy $x_1 > 0,...,x_n > 0$. Tento způsob zápisu je obvyklý například v ekonomicko-matematických metodách.

Na několika místech bude v následujícím výkladu použit pojem skalárního součinu vektorů.

Definice 1.11 **Skalárním součinem** aritmetických vektorů $\boldsymbol{a} = (a_1,...,a_n)$ a $\boldsymbol{b} = (b_1,...,b_n)$ rozumíme číslo $\boldsymbol{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$. ■

1.2.3 Podprostor vektorového prostoru

Definice 1.12 Nechť V je vektorový prostor, W neprázdná podmnožina množiny V. Řekneme, že množina W je **podprostor vektorového prostoru** V a píšeme $W \subset V$, jestliže platí:

(1) Pro každou dvojici vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in W$ je $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$.
(2) Pro každé reálné číslo $r \in \mathbf{R}$ a každý vektor $\boldsymbol{a} \in W$ je $r\boldsymbol{a} \in W$. ■

Podprostor W vektorového prostoru V je vždy vektorovým prostorem. Vyplývá to z toho, že v podprostoru W platí axiomy ($A1$)–($A8$) a podle podmínek (1) a (2) z definice podprostoru je množina W uzavřená vzhledem k operacím sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem.

Nechť $\boldsymbol{o}$ je nulový vektor vektorového prostoru V. Jednoprvková množina obsahující pouze nulový vektor, tedy množina $\{\boldsymbol{o}\}$ je podprostor vektorového prostoru V. Množina $\{\boldsymbol{o}\}$ se nazývá **triviální vektorový prostor**. Triviální vektorový prostor je jediný vektorový prostor, který má konečný počet prvků (obsahuje-li vektorový prostor alespoň jeden nenulový vektor, pak obsahuje současně všechny reálné násobky tohoto vektoru a těch je nekonečný počet).

Ve smyslu shora uvedené definice je podprostorem libovolného vektorového prostoru V také celý vektorový prostor V.

Definice 1.13 Nechť $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k$ jsou prvky vektorového prostoru V. Řekneme, že vektor $\boldsymbol{a}$ je **lineární kombinací** vektorů $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k$, jestliže existují reálná čísla $c_1,\dots,c_k$ taková, že platí $\boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{a}_1 + \dots + c_k\boldsymbol{a}_k$. Čísla $c_1,\dots,c_k$ se nazývají **koeficienty lineární kombinace**. ■

Příklad 1.5 Nulový vektor $\boldsymbol{o}$ je lineární kombinací libovolné skupiny vektorů $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k$ z vektorového prostoru V, protože platí $\boldsymbol{o} = 0\boldsymbol{a}_1 + \dots + 0\boldsymbol{a}_k$. Lineární kombinace vektorů, ve které jsou všechny koeficienty rovny nule, se nazývá **triviální lineární kombinace**. ■

Příklad 1.6 Zjistěme, zda vektor $\boldsymbol{a} = (2, 1, 6)$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}_1 = (4, 0, -1)$ a $\boldsymbol{a}_2 = (2, 0, 5)$.

Řešení Podle definice lineární kombinace je třeba najít reálná čísla c_1, c_2 tak, aby platilo

$$\boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2.$$

Po dosazení souřadnic vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ do této rovnice obdržíme

$$(2, 1, 6) = (4c_1 + 2c_2, 0c_1 + 0c_2, -1c_1 + 5c_2).$$

Podle definice rovnosti aritmetických vektorů to znamená, že platí

$$2 = 4c_1 + 2c_2,$$
$$1 = 0c_1 + 0c_2,$$
$$6 = -1c_1 + 5c_2.$$

Zřejmě neexistují žádná reálná čísla c_1, c_2 vyhovující této soustavě rovnic (viz druhá rovnice), proto vektor $\boldsymbol{a}$ není lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$. ■

Pojem lineární kombinace vektorů nám umožňuje demonstrovat další příklad podprostoru vektorového prostoru V. Uvažujme vektory $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k$ z vektorového prostoru V. Označme $[\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k]$ množinu všech lineárních kombinací vektorů $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$, tedy $[\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k] = \{\boldsymbol{a} \in V\ ;\ \boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{a}_1 + \dots + c_k\boldsymbol{a}_k,\ c_1,\dots,c_k \in \mathbf{R}\}$.

Definice 1.14 Nechť $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k$ jsou vektory z vektorového prostoru V. Množina $[\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k]$ všech lineárních kombinací vektorů $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k$ se nazývá **lineární obal** množiny vektorů $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k\}$. ■

Věta 1.2 Jsou-li $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$ vektory z vektorového prostoru V, pak je jejich lineární obal $[\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k]$ podprostor vektorového prostoru V. ■

Lineární obal $[\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k]$ je podprostor vektorového prostoru a jako takový je sám vektorovým prostorem. Vektorový prostor $[\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k]$ je zřejmě „nejmenší“ vektorový prostor obsahující všechny vektory $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k$.

Definice 1.15 Nechť $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k$ jsou vektory z vektorového prostoru V. Jestliže každý vektor $\boldsymbol{a} \in V$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k$, říkáme, že vektorový prostor V je **generován** vektory $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k$ a této množině vektorů říkáme **množina generátorů** vektorového prostoru V. ■

Z uvedené definice vyplývá, že množina vektorů $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k$ je množinou generátorů vektorového prostoru V právě tehdy, když platí $V = [\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k]$.

Triviální vektorový prostor je generován nulovým vektorem $\boldsymbol{o}$.

Příklad 1.7 Dvojice vektorů $\boldsymbol{j}_1 = (1, 0)$, $\boldsymbol{j}_2 = (0, 1)$ je množinou generátorů aritmetického vektorového prostoru V_2. Snadno ověříme, že libovolný vektor $\boldsymbol{a} = (a_1,a_2)$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{j}_1$, $\boldsymbol{j}_2$ ve tvaru $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{j}_1 + a_2\boldsymbol{j}_2$. ■

Příklad 1.8 Rozhodněme, zda vektory $\boldsymbol{x} = (1, -3)$, $\boldsymbol{y} = (-1, 4)$ jsou množinou generátorů aritmetického vektorového prostoru V_2.

Řešení Vektory $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ generují prostor V_2, jestliže pro každý vektor $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ existují reálná čísla c_1, c_2 tak, že platí $\boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{x} + c_2\boldsymbol{y}$.

Po dosazení souřadnic vektorů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ do předchozího vztahu obdržíme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých c_1, c_2:

$$a_1 = c_1 - c_2,$$
$$a_2 = -3c_1 + 4c_2.$$

Vynásobíme-li první rovnici čtyřmi a obě rovnice sečteme, získáme $c_1 = 4a_1 + a_2$.

Obdobně po vynásobení první rovnice třemi a následném sečtení máme

$$c_2 = 3a_1 + a_2.$$

Protože každý vektor $\boldsymbol{a} = (a_1,a_2)$ z V_2 je možné napsat ve tvaru $\boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{x} + c_2\boldsymbol{y} = (4a_1 + a_2)\boldsymbol{x} + (3a_1 + a_2)\boldsymbol{y}$, je prostor V_2 generován vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$. ■

Příklad 1.9 Množinou generátorů vektorového prostoru V_2 jsou také vektory $\boldsymbol{x} = (3,0)$, $\boldsymbol{y} = (5,1)$, $\boldsymbol{z} = (0,4)$, neboť pro každý vektor $\boldsymbol{a} = (a_1,a_2)$ platí např. $\boldsymbol{a} = \frac{1}{3}a_1\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{y} + \frac{1}{4}a_2\boldsymbol{z}$. ■

Z uvedených příkladů je vidět, že množina generátorů vektorového prostoru V není jediná a že dokonce ani počet generátorů není jednoznačně určen.

Bližší představu o množinách generátorů vektorového prostoru V dává následující věta.

Věta 1.3 Nechť $\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k\}$ je množina vektorů z vektorového prostoru V a $\{\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_q\}$ je množina vektorů, která vznikla z množiny vektorů $\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k\}$ jedním z následujících způsobů:

a) změnou pořadí vektorů,
b) násobením libovolného vektoru nenulovým reálným číslem,
c) přičtením k libovolnému vektoru lineární kombinace ostatních vektorů,
d) vynecháním vektoru, který je lineární kombinací ostatních,
e) přidáním vektoru, který je lineární kombinací ostatních vektorů.

Jestliže množina vektorů $\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k\}$ tvoří množinu generátorů vektorového prostoru V, pak také množina vektorů $\{\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_q\}$ tvoří množinu generátorů vektorového prostoru V. ■

Z uvedené věty vyplývá, že každý netriviální vektorový prostor má nekonečně mnoho množin generátorů. Věta navíc uvádí seznam úprav, kterými můžeme z jedné množiny generátorů vektorového prostoru vytvořit jinou. S podobnými úpravami se v první kapitole knihy setkáme na více místech (hodnost matice, řešení soustav lineárních rovnic).

1.2.4 Lineární závislost a nezávislost vektorů

Definice 1.16 Nechť $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k$ jsou vektory z vektorového prostoru V. Řekneme, že vektory $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k$ jsou **lineárně závislé**, jestliže existují reálná čísla $c_1,\dots,c_k$, z nichž alespoň jedno je různé od nuly, taková, že platí $c_1\boldsymbol{a}_1 + \dots + c_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{o}$. V opačném případě se vektory $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k$ nazývají **lineárně nezávislé**. Mluvíme také o lineární závislosti, resp. lineární nezávislosti množiny vektorů $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k\}$. ■

Vektory $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k$ jsou podle uvedené definice lineárně nezávislé právě tehdy, když ze všech jejich možných lineárních kombinací je nulovému vektoru **o** rovna pouze jejich triviální lineární kombinace. Vektory $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k$ jsou pak lineárně závislé právě tehdy, když existuje současně nějaká jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru $\boldsymbol{o}$.

Uvědomme si přitom, že pro $k = 1$, tedy v případě jednoho vektoru $\boldsymbol{a}_1$, je tento vektor lineárně závislý právě tehdy, když je nulový. Pouze pro nulový vektor $\boldsymbol{o}$ totiž platí rovnice $c_1\boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$, kde c_1 je různé od nuly. Nenulový vektor $\boldsymbol{a}_1$ je vždy lineárně nezávislý, neboť rovnice $c_1\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{o}$ je splněna jen tehdy, když $c_1 = 0$.

Příklad 1.10 Rozhodněme, zda vektory $\boldsymbol{a}_1 = (-1,3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2,6)$ patřící do aritmetického vektorového prostoru V_2 jsou lineárně závislé či nezávislé.

Řešení Podle definice 1.16 je třeba zjistit, pro která reálná čísla c_1, c_2 je splněna rovnice $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{o}$.